

Álgebra Computacional y Aplicaciones

Equipo organizador

Red EACA: Red Temática de Cálculo Simbólico, Álgebra Computacional y Aplicaciones (<https://riemann.unizar.es/RedEACA/index.html>)

- Philippe Gimenez (Universidad de Valladolid)
- Sonia Pérez-Díaz (Universidad de Alcalá)
- Ana Romero (Universidad de La Rioja)

Descripción

El álgebra computacional es un área de investigación de carácter interdisciplinar cuyo cometido principal es el desarrollo, construcción y análisis de algoritmos efectivos que manipulen objetos simbólicos susceptibles de ser representados en un ordenador, con especial énfasis en los cálculos correspondientes a objetos de entidad matemática y con vistas a sus aplicaciones, no sólo en la propia matemática, sino también en otras ramas de la ciencia (como la física, la química, la biología, la medicina, etc.) e incluso en la industria.

La lista de ponentes propuesta incluye en su mayoría a jóvenes investigadores españoles, pre o postdoctorales, que se dedican a áreas muy diversas como el álgebra conmutativa, la topología computacional, la estadística algebraica, la teoría de grafos, o la criptografía, y que, de alguna manera, usan el álgebra computacional. Además, se han incluido a dos miembros del comité científico de la Red EACA, Ana Romero (coordinadora de la Red) e Ignacio García-Marco.

Palabras clave: Álgebra Computacional; Algoritmos; Bases de Gröbner; Aplicaciones; Demostración automática.

Programa

JUEVES, 22 de enero

- 11:00 – 11:30 Ana Romero (Universidad de La Rioja)
New biomedical applications of topological data analysis
- 11:30 – 12:00 Marina Garrote-López (KTH Royal Institute of Technology)
Estadística Algebraica en OSCAR
- 12:00 – 12:30 Alexandru Iosif (Universidad Rey Juan Carlos)
Discriminants à la Sturm for families of affine sections of positive toric varieties
- 12:30 – 13:00 Gonzalo Rodríguez-Pajares (Universidad de Valladolid, IMUVa)
A combinatorial description of when a self-dual set of points fails to be arithmetically Gorenstein
- 15:30 – 16:00 Sara Asensio (Universidad de Valladolid e IMUVa)
On the shadow of Betti diagrams of edge ideals
- 16:00 – 16:30 Rodrigo Iglesias (Universidad de La Rioja)
Cellular free resolutions induced by involutive bases
- 16:30 – 17:00 Patricia Pascual-Ortigosa (Universidad de La Rioja)
Polarización y depolarización de complejos simpliciales
- 17:00 – 17:30 Laura González (Universitat Politècnica de Catalunya)
Problemas abiertos en torno a los ideales primos de Moh
- 18:00 – 18:30 Jose Brox (Instituto de Matemáticas de la Universidad de Valladolid, IMUVa)
Making 22 million proofs: the Equational Theories Project
- 18:30 – 19:00 Javier Rández-Ibáñez (Universidad de La Rioja)
Aplicaciones adjuntas asociadas a formas bilineales

VIERNES, 23 de enero

- 11:00 – 11:30 Ujué Etayo (CUNEF Universidad)
Study of the Condition Number through Minimal Energies
- 11:30 – 12:00 Adrián Fidalgo-Díaz (Universidad de Valladolid)
Computing the Clifford defect for some numerical semigroups
- 12:00 – 12:30 Ignacio García-Marco (Universidad de La Laguna e IMAULL)
Coloring minimal Cayley graphs

New biomedical applications of topological data analysis

ANA ROMERO, JOSE DIVASÓN, EDUARDO SÁENZ DE CABEZÓN

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

ana.romero@unirioja.es

Resumen.

Topological data analysis (TDA) is a powerful tool for understanding the structure and topology of data, being persistent homology [3] and zigzag persistence [1] some of its most popular methods.

In a previous work [2], we explored the use of zigzag persistence for digital image processing and we developed a new software for computing the relationships between homology classes of a sequence of binary images via zigzag persistence. Moreover, we demonstrated its effectiveness by applying our programs to a real-world biological problem of analyzing honey bee sperm videos.

Now, we try to apply our zigzag persistence algorithms and other TDA tools to other biomedical problems, considering in particular diabetic retinopathy, a diabetes-related eye condition that affects the blood vessels in the retina. In a recently started collaboration with the group led by Dr. José María Sabater (University Miguel Hernández of Elche), we aim to apply TDA to enhance early detection of this illness by identifying complex vascular patterns and subtle functional changes in the retina before symptoms become apparent and predict disease progression.

Referencias

- [1] G. Carlsson and V. de Silva (2010). Zigzag persistence. *Foundations of Computational Mathematics*, 10(4):367–405.
- [2] J. Divasón, A. Romero, P. Santolaria, and J. Yániz (2024). Zigzag persistence for image processing: New software and applications. *Pattern Recognit. Lett.*, 184:111–118.
- [3] A. Zomorodian and G. Carlsson (2005). Computing Persistent Homology. *Discrete and Computational Geometry* 33: 249–274, 2005.

Agradecimientos. Parcialmente financiado por proyectos Inicia 2023/02 y Afianza 2024/03 financiados por la Comunidad Autónoma de La Rioja y PID2024-157733NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Estadística Algebraica en OSCAR

MARINA GARROTE-LÓPEZ, TOBIAS BOEGE, ANTONY DELLA VECCHIA, BEN HOLLERING

Department of Mathematics, KTH Royal Institute of Technology

marinagl@kth.se

Resumen.

En esta charla introduciremos un nuevo módulo de *Estadística Algebraica* desarrollado para el sistema de álgebra computacional de código abierto OSCAR, que integra herramientas como Singular y Polymake, y está basado en el lenguaje Julia. Nuestro módulo proporciona herramientas para trabajar con modelos clásicos de estadística algebraica, un área que combina métodos del álgebra, la geometría y la combinatoria para abordar problemas estadísticos.

Nos enfocamos en modelos estadísticos paramétricos definidos por funciones racionales en sus parámetros, lo que permite interpretarlos como variedades algebraicas. En particular, consideramos modelos gráficos gaussianos y discretos (dirigidos y no dirigidos), modelos de sustitución de nucleótidos en árboles y redes filogenéticas, y modelos de independencia condicional.

Todos estos pueden describirse como modelos gráficos, es decir, modelos paramétricos M_G asociados a un grafo G , donde $M_G = \text{Im}(\phi_G)$ y ϕ_G es una aplicación racional. En la charla explicaremos los principales objetivos del módulo y sus funcionalidades más relevantes—como la construcción y manipulación de las parametrizaciones ϕ_G , el cálculo de un conjunto generador del núcleo de ϕ_G o la construcción de ideales críticos asociados a problemas de optimización—y los aspectos metodológicos detrás de estos cálculos.

Referencias

- [1] W. Decker, C. Eder, C. Fieker, M. Horn, M. Joswig, eds. (2025) *The Computer Algebra System OSCAR: Algorithms and Examples, Algorithms and Computation in Mathematics*, Springer.
- [2] S. Sullivant (2018) *Algebraic Statistics*, Volume 194 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society.

Discriminants à la Sturm for families of affine sections of positive toric varieties

ALEXANDRU IOSIF

Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de los Materiales y Tecnología Electrónica, Universidad Rey Juan Carlos

alexandru.iosif@urjc.es

Resumen. We present a simple way of computing a discriminant for a family of positive zero-dimensional varieties by means of Sturm sequences. While this idea is not new and Sturm sequences can be highly inefficient, we show that, in the case of families of affine sections of positive toric varieties, computations are tractable, by providing computations for discriminants of dynamical systems originating in Biochemistry. We then compare this method with other existing methods.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por Deutsche Forschungsgemeinschaft, 284057449, y por Deutsche Forschungsgemeinschaft, 314838170 GRK 2297 MathCoRe.

A combinatorial description of when a self-dual set of points fails to be arithmetically Gorenstein

GONZALO RODRÍGUEZ-PAJARES, DIEGO RUANO, FLAVIO SALIZZONI

IMUVa-Mathematics Research Institute, Universidad de Valladolid, Spain

gonzalo.rodriguez.pajares@uva.es

Resumen. Let \mathcal{C} be an \mathbb{F}_q -linear code of dimension k in \mathbb{F}_q^n . Given a generator matrix $G \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$ of the code \mathcal{C} , we can associate \mathcal{C} with the projective set $\Pi_G \subseteq \mathbb{P}(\bar{\mathbb{F}}_q)$ whose points correspond to the columns of G , up to multiplicity. The question of whether, for a given self-dual code over \mathbb{F}_q^{2k} , the associated set Π_G is arithmetically Gorenstein was posed in [2], building on a result from [1]. We provide a combinatorial answer in terms of the number of connected components of a graph derived from a zero-one symmetrization of the generator matrix.

Palabras clave: Self-dual codes; Arithmetically Gorenstein; Schur product; Connected component of a graph.

Referencias

- [1] D. Eisenbud, S. Popescu (2000). The projective geometry of the Gale transform. *J. Algebra.*, 230, 1, 127–173.
- [2] Ş. O. Tohăneanu (2024) *Commutative algebra methods for coding theory*. De Gruyter Studies in Mathematics, 97.

Agradecimientos. This work was supported in part by Grant PID2022-138906NB-C21 funded by MICIU/AEI/10.13039/501100011033 and by ERDF/EU. G. R.-P. is supported by Grant CONTPR-2024-484 funded by Universidad de Valladolid and Banco Santander. F. S. is supported by the P500PT-222344 SNSF project.

On the shadow of Betti diagrams of edge ideals

SARA ASENSIO, IGNACIO GARCÍA-MARCO, PHILIPPE GIMENEZ

Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, Universidad de Valladolid e IMUVa

sara.asensio@uva.es

Resumen. Given an arbitrary field k and a graph G with vertex set $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ and edge set $E(G)$, it is possible to define the edge ideal $I(G)$ associated to G in the polynomial ring $R = k[x_1, \dots, x_n]$ as $I(G) = \langle x_i x_j \mid \{x_i, x_j\} \in E(G) \rangle$.

These ideals were first defined in 1990 by R. H. Villarreal [5], establishing a strong connection between commutative algebra and graph theory. Since then, several authors began to study them by taking advantage of the combinatorial properties of G and other graphs associated to $I(G)$.

In 1990, R. Fröberg [4] proved the first very relevant result in this direction: $I(G)$ has a linear resolution, meaning that its Betti diagram has only one row, if and only if the complement G^c of G has no induced cycles of length at least 4. This result was later improved by D. Eisenbud, M. Green, K. Hulek and S. Popescu [1], who determined the step at which the resolution of $I(G)$ stops being linear in terms of the minimum length of a cycle in G^c .

In 2009 and 2014, Ó. Fernández-Ramos and P. Gimenez [2, 3] computed the first nonzero entry of the second row of the Betti diagram of every edge ideal whose resolution is not linear, characterized the edge ideals associated to bipartite graphs with regularity 3 in terms of combinatorial properties of the bipartite complement G^{bc} of G , and computed the first nonzero entry of the third row of the Betti diagram of the edge ideals associated to bipartite graphs when it exists.

In this talk, we will give a review of the state of the art in the study of Betti diagrams of edge ideals associated to graphs, paying special attention to the combination of homological and combinatorial tools that has played an important role in this story. In addition, we will discuss new results related to the application of homological techniques to edge ideals of families of graphs with certain characteristics.

Referencias

- [1] D. Eisenbud, M. Green, K. Hulek, S. Popescu (2004). Restricting linear syzygies: algebra and geometry. *Compos. Math.*, 141, 1460–1478.
- [2] Ó. Fernández-Ramos, P. Gimenez (2009). First nonlinear syzygies of ideals associated to graphs. *Comm. Algebra*, 37, 1921–1933.
- [3] Ó. Fernández-Ramos, P. Gimenez (2014). Regularity 3 in edge ideals associated to bipartite graphs. *J. Algebraic Combin.*, 39, 919–937.
- [4] R. Fröberg (1990). On Stanley-Reisner rings. *Banach Center Publ.*, 26, 57–70.
- [5] R. H. Villarreal (1990). Cohen-Macaulay graphs. *Manuscripta Math.*, 66, 277–293.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por el proyecto PID2022-137283NB-C22, financiado a su vez por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por ERDF/EU. La ponente agradece también el apoyo económico del Fondo Social Europeo, el Programa Operativo de Castilla y León, y la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León.

Cellular free resolutions induced by involutive bases

RODRIGO IGLESIAS, EDUARDO SÁENZ-DE-CABEZÓN

Departamento de Matemáticas y Computación , Universidad de La Rioja

roiglesi@unirioja.es

Resumen. Involutive divisions assign sets of *multiplicative/non-multiplicative variables* to each term of a set in the polynomial ring in n variables. These assignments give rise to involutive bases, which are a type of Gröbner basis with additional combinatorial properties. Some of these involutive divisions, in particular the so-called Janet and Pommaret divisions, have particularly interesting algebraic properties and are efficient tools for computing homological invariants of the ideal. In this talk, we explore on which monomial ideal these involutive bases behave particularly well, enabling the construction of cellular free resolutions. Furthermore, based on these constructions induced from involutive bases, we are able to provide explicit descriptions of the minimal free resolutions for certain classes of monomial ideals.

Agradecimientos. Parcialmente financiado por proyecto PID2024-157733NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Polarización y depolarización de complejos simpliciales

PATRICIA PASCUAL-ORTIGOSA, VÍCTOR M. LÓPEZ-ANTÓN, PABLO MUNARRIZ-SENOSIAIN, EDUARDO SÁENZ-DE-CABEZÓN

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

patricia.pascualo@unirioja.es

Resumen. El objetivo de esta charla es mostrar la relación que existe entre un complejo simplicial de Koszul de un ideal monomial y el de su polarizado.

La operación polarización transforma un ideal monomial arbitrario en un ideal monomial libre de cuadrados. Gracias a esta operación nos restringimos a que los exponentes de los monomios sean 0 o 1, sin embargo, vamos a tener que trabajar en un anillo de polinomios con más variables. Por otro lado, la operación depolarización transforma un ideal monomial libre de cuadrados en un ideal monomial con exponentes (ver [1] para más información). Estas dos operaciones conservan, entre otros invariantes, los números de Betti y, por tanto, la homología de sus complejos simpliciales asociados (ver, por ejemplo, [2]).

En esta charla, proponemos reducir un complejo simplicial a uno más pequeño con la misma homología empleando la operación depolarización. De esta forma, este proceso puede utilizarse como un paso previo en un algoritmo para calcular la homología simplicial.

Para terminar, mostraremos algunos experimentos realizados con ordenador para ilustrar la eficiencia de esta propuesta.

Referencias

- [1] F. Mohammadi, P. Pascual-Ortigosa, E. Sáenz-de-Cabezón, H. P. Wynn (2020). Polarization and depolarization of monomial ideals with application to multi-state system reliability, *Journal of Algebraic Combinatorics*, Springer, n.º. 4, vol. 51, 617–639.
- [2] J. Herzog, T. Hibi (2011) *Monomial ideals*. Springer.

Agradecimientos. Parcialmente financiado por proyecto PID2024-157733NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Problemas abiertos en torno a los ideales primos de Moh

LAURA GONZÁLEZ, FRANCESC PLANAS-VILANOVA

Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya

laura.gonzalez.hernandez@upc.edu

Resumen. Sea K un cuerpo y sea $P_n = \ker \rho_n$ el núcleo del morfismo de K -álgebras $\rho_n : K[[x, y, z]] \rightarrow K[[t]]$, definido por $\rho_n(x) = t^{nm} + t^{nm+\lambda}$, $\rho_n(y) = t^{(n+1)m}$ y $\rho_n(z) = t^{(n+2)m}$, donde n es un entero impar positivo, $m = (n+1)/2$ y λ es un entero mayor que $n(n+1)m$ y coprimo con m (ver [4]). Moh demuestra que, cuando la característica de K es cero, el mínimo número de generadores de P_n es $n+1$. Es decir, el mínimo número de generadores de la familia de ideales primos P_n no está acotado.

En esta charla trataremos algunas cuestiones abiertas relacionadas con los ideales primos de Moh, entre ellas la posibilidad de eliminar la restricción sobre la característica de K , así como eliminar la hipótesis de n impar. También hablaremos sobre cómo encontrar explícitamente los generadores de una familia de ideales primos cuyo mínimo número de generadores no esté acotado. En esta línea véanse, por ejemplo, los trabajos [1, 2, 3].

Referencias

- [1] L. González, F. Planas-Vilanova, Prime ideals of Moh and the characteristic of the field (2024). arXiv:2407.21692 arXiv:2407.21692.
- [2] J. Maurer, Eine Variante der Moh-Kurven (1980). Preprint.
- [3] R. Mehta, J. Saha, I. Sengupta (2021). Moh's example of algebroid space curves. *J. Symbolic Comput.* 104, 168–182.
- [4] T.T. Moh (1974). On the unboundedness of generators of prime ideals in power series rings of three variables. *J. Math. Soc. Japan* 26, 722–734.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por PID2019-103849GB-I00 y PID2023-146936NB-I00.

Making 22 million proofs: the Equational Theories Project

BROX, TAO, BOLAN, ET AL.

Instituto de Matemáticas de la Universidad de Valladolid (IMUVA)

josebrox@uva.es

Resumen. Recently, Terence Tao launched and led the Equational Theories Project [1], an online collaborative pilot project to explore new ways to collaborate in mathematics with machine assistance. The project successfully determined all 22 million edges of the implication graph between the 4694 simplest equational laws on magmas, by a combination of human-generated and automated proofs, all validated by the formal proof assistant language Lean. As a collaborator of this project, in this talk I will quickly address its two main aspects: the problem we have tackled together with the tools we have used, and how this international, online collaboration has been successfully organized and carried out.

Referencias

- [1] The Equational Theories Project (2024-25). Mapping out the relations between different equational theories of magmas. https://teorth.github.io/equational_theories/
- [2] M. Bolan et al. (2025). The Equational Theories Project: advancing collaborative mathematical research at scale. Preprint. https://teorth.github.io/equational_theories/paper.pdf

Agradecimientos. The author is supported by a postdoctoral fellowship “Convocatoria 2021” funded by Universidad de Valladolid, and partially supported by grant PID2022-137283NB-C22 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and ERDF/EU.

Aplicaciones adjuntas asociadas a formas bilineales

JAVIER RÁNDEZ-IBÁÑEZ

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

jarandez@unirioja.es

Resumen. Dada una forma bilineal φ simétrica o antisimétrica y no degenerada sobre V , un espacio vectorial de dimensión finita, y una aplicación lineal $f: V \rightarrow V$, existe una única aplicación lineal f^* , llamada aplicación adjunta, definida por la siguiente relación

$$\varphi(f(x), y) = \varphi(x, f^*(y)).$$

Cuando $f^* = f^{-1}$, la aplicación se llama isometría y la estructura de estas aplicaciones ha sido ampliamente estudiada en [1]. Cuando $f^* = -f$, la aplicación se dice antiadjunta, y su estructura también ha sido descrita en [2]. Estos dos tipos de aplicaciones presentan ciertos patrones comunes que sugieren la posibilidad de establecer un tratamiento simultáneo y más general de sus formas canónicas y la forma bilineal que las define.

En esta charla exploraremos un enfoque más genérico de aplicaciones que cumplen que $f^* \in \mathbb{K}[f]$ y discutiremos cómo describir su estructura.

Referencias

- [1] Milnor, J. (1969). On isometries of inner product spaces. *Inventiones mathematicae*, 8(2), 83–97.
- [2] Benito, P., Rández-Ibáñez, J., Roldán-López, J. (2024). Skew-adjoint maps and quadratic Lie algebras. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 21(3), 115.

Study of the Condition Number through Minimal Energies

UJUÉ ETAYO

Departamento de matemáticas, CUNEF Universidad

ujue.etayo@cunef.edu

Resumen. Given a univariate polynomial with complex coefficients, the condition number of the polynomial at one of its roots quantifies how the root changes under slight perturbations of the polynomial's coefficients. This number may range from 1 (the root remains unchanged) to ∞ (the root is multiple). In this talk, we present a connection between polynomials with very small condition numbers and points that minimise the logarithmic potential defined on the 2-dimensional sphere.

Referencias

Agradecimientos. Proyecto PID2020-113887GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por la starting grant de la FBBVA asociada al premio José Luis Rubio de Francia.

Computing the Clifford defect for some numerical semigroups

ADRIÁN FIDALGO-DÍAZ, EDUARDO CAMPS-MORENO, UMBERTO MARTÍNEZ-PEÑAS, GRETCHEN MATTHEWS

Departamento de Álgebra, Universidad de Valladolid

adrian.fidalgo22@uva.es

Resumen. One-point algebraic-geometry codes are a family of codes defined by fixing a nonsingular algebraic curve and evaluating certain algebraic functions whose pole set is restricted to a single point P . The parameters of these codes can be determined or bounded using invariants of the curve. For instance, the set of admissible pole orders at P , known as the Weierstrass semigroup, provides useful information. Regarding decoding, the so-called “Modified Algorithm” introduced in [1] allows decoding up to half the designed minimum distance minus a defect that depends on the Weierstrass semigroup. The authors independently described this defect in the context of applying algebraic-geometry codes to distributed matrix multiplication [2].

In this work, we compute the decoding defect for some families of semigroups arising from curves commonly used in coding theory. Notably, we compute the defect for the Suzuki curve, the Norm-Trace curve and present results for the Pedersen–Sørensen curve, partially answering one of the questions posed in [3].

Referencias

- [1] Skorobogatov, A. N., & Vladut, S. G. (1990). On the decoding of algebraic-geometric codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 36(5), 1051-1060.
- [2] Fidalgo-Díaz, A., & Martínez-Peñas, U. (2024). Distributed matrix multiplication with straggler tolerance using algebraic function fields. *IEEE Transactions on Information Theory*.
- [3] Kirfel, C. (1993). On the Clifford defect for special curves. In *Proceedings of AGCT-4, Luminy*.

Coloring minimal Cayley graphs

IGNACIO GARCÍA-MARCO, KOLJA KNAUER

Departamento de Matemáticas, Estadística e I.O., Universidad de La Laguna e IMAULL

iggarcia@ull.edu.es

Resumen.

For a finite group (G, \cdot) and a set of generators C of G , the Cayley graph of G with respect to C has the elements of G as vertices and edges $\{g, g \cdot c\}$ where $g \in G$ and $c \in C$. Cayley graphs are central objects in combinatorial and computational group theory.

In 1978, Babai [1] raised the question whether all Cayley graphs of groups with respect to a minimal set of generators have bounded chromatic number; in 1994 he conjectured a negative answer. In this talk we show that any minimal Cayley graph of a (generalized) dihedral or nilpotent group has chromatic number at most 3. On the contrary, we exhibit soluble groups with chromatic number at least 4. On the other hand we address a related question proposed by Babai in 1978 by constructing graphs of unbounded chromatic number that admit a proper edge coloring such that each cycle has some color at least twice. The latter can be viewed as a step towards confirming Babai's 1994 conjecture – a problem that remains open.

The results in this talk are included in [2].

Referencias

- [1] L. Babai (1978). Chromatic number and subgraphs of Cayley graphs. *Theor. Appl. Graphs, Proc. Kalamazoo 1976*, Lect. Notes Math. 642, 10-22.
- [2] I. García-Marco, K. Knauer (2025). Coloring minimal Cayley graphs. *Eur. J. Combin.* 125, 104108.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por el proyecto PID2022-137283NB-C22 concedido por el MICIU/AEI/ 10.13039/501100011033.