

## Análisis funcional, análisis armónico y métodos variacionales: nuevas direcciones

### Equipo organizador

- Ángel San Antolín Gil (Universidad de Alicante)
- Fernando García Castaño (Universidad de Alicante)
- José Carlos Navarro Climent (Universidad de Alicante)

### Descripción

Esta sesión reúne contribuciones recientes que exploran nuevas direcciones en análisis funcional, análisis armónico y métodos variacionales, con énfasis tanto en desarrollos teóricos como en aplicaciones. Se abordarán cuestiones como la regularidad de soluciones de EDPs en entornos no locales o definidos sobre nubes de datos aleatorias, así como propiedades de marcos de Parseval, funciones armónicas univalentes y la influencia del principio de incertidumbre en modelos cuánticos. Otras charlas se centran en técnicas de suavización en optimización convexa, el comportamiento del inradio asintótico en espacios de Banach o el uso de métodos de teoría de conjuntos —como forcing o teoría descriptiva— en la resolución de problemas estructurales en análisis funcional. La sesión también incluye resultados recientes sobre el índice numérico en espacios bidimensionales, medidas vectoriales y clases de funciones casi periódicas en el plano complejo. Esta variedad temática refleja la riqueza de ideas y la interacción entre distintas áreas del análisis actual, así como su conexión con campos emergentes como el aprendizaje automático y el control óptimo.

**Palabras clave:** Análisis funcional, Análisis armónico, Métodos variacionales, Espacios de Banach, Ecuaciones en derivadas parciales.

## Programa

JUEVES, 22 de enero

- 11:00 – 11:30 Gustavo Garrigós Aniorte (Universidad de Murcia)  
*Fatou type theorems for Poisson integrals associated with the Hermite operator*
- 11:30 – 12:00 Matías Raja Baño (Universidad de Murcia)  
*La persistencia del inradio asintótico*
- 12:00 – 12:30 Antonio Avilés López (Universidad de Murcia)  
*Aplicaciones de la teoría de conjuntos a problemas en espacios de Banach*
- 12:30 – 13:00 Antonio José Guirao Sánchez (Universitat Politècnica de València)  
*Índice numérico en espacios bidimensionales: avances y aplicaciones*
- 15:30 – 16:00 José Rodríguez Ruiz (Universidad de Castilla-La Mancha)  
*Cuestiones sobre medidas vectoriales*
- 16:00 – 16:30 Oscar Blasco de la Cruz (Universidad de Valencia)  
*Sobre el Principio de Incertidumbre y aplicaciones*
- 16:30 – 17:00 Davide Barbieri (Universidad autónoma de Madrid)  
*Some problems of harmonic analysis in machine learning and neural networks*
- 17:00 – 17:30 Ángel Arroyo García (Universidad de Alicante)  
*Regularity estimates for approximations of elliptic PDE's on random data clouds*
- 18:00 – 18:30 Carlos Esteve Yagüe (Universidad de Alicante)  
*Boundary profile for certain Hamilton-Jacobi equations*
- 18:30 – 19:00 María José Martín Gómez (Universidad de la Laguna)  
*On harmonic univalent functions*

VIERNES, 23 de enero

- 11:00 – 11:30 Mohammed Ibrahim Abdelkayoum Ghitri (Universidad de Alicante)  
*Smoothing Effects of Epi-convergence and Infimal convolution in Optimization*
- 11:30 – 12:00 Chahla Boukeffous (Universidad de Alicante)  
*Approximation properties of Parseval frames via extension principles*
- 12:00 – 12:30 José Orihuela (Universidad de Murcia)  
*Solution to open problems going back to Joram Lindenstrauss*
- 12:30 – 13:00 Hadjer Ounis (Universidad de Alicante)  
*The class of  $c$ -almost periodic functions defined on vertical strips in the complex plane*

## Regularity estimates for approximations of elliptic PDE's on random data clouds

ÁNGEL ARROYO GARCÍA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

angelrene.arroyo@ua.es

**Resumen.** The regularity question is one of the main problems in Analysis of PDE's. In the 70s, Krylov and Safonov proved that the solutions of PDEs in non divergence form are Hölder continuous. In the last decade, this result have been adapted to the nonlocal setting in several contexts. In particular, in previous works, we adapted this regularity estimate for a class of nonlocal approximations of elliptic PDE's arising from a generalization of the mean value property for harmonic functions. On the other hand, in the recent years, the analysis of functions defined on random data clouds has received an increasing attention due to its connection with Machine Learning. For that reason, in this talk we address the regularity problem on random data clouds, for which we adapt the nonlocal Krylov-Safonov theory for functions satisfying Pucci-type extremal inequalities. It is worth mentioning that the mean value property, which is the corner stone in the connection between elliptic PDE's and their nonlocal counterparts, can also be interpreted from a stochastic point of view, allowing the use of probabilistic ideas. Our proof, however, relies entirely on analytic arguments.

# Aplicaciones de la teoría de conjuntos a problemas en espacios de Banach

ANTONIO AVILÉS LÓPEZ

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

avileslo@um.es

**Resumen.** En esta charla se revisarán trabajos recientes en los que se han aplicado técnicas de teoría de conjuntos —como el *forcing* y la teoría descriptiva— para abordar problemas abiertos en el contexto de los espacios de Banach y los retículos de Banach. Se destacarán tanto los resultados obtenidos como el papel fundamental que juegan estas herramientas *set-theoretic* en la resolución de cuestiones estructurales y topológicas en análisis funcional.

# Some problems of harmonic analysis in machine learning and neural networks

DAVIDE BARBIERI

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

davide.barbieri@uam.es

**Resumen.** Neural networks are a class of functions that has proved to be particularly effective in approximating data for classification or generative tasks. To this end, the structure of the parameterization, often called “architecture”, is crucial. For images and data whose information is encoded in localized features, convolutional structures encoding locality provide the best result. Extending the symmetries of convolutional neural networks can lead to architectures capable of dealing with more structured data, but requires techniques of abstract harmonic analysis. We will present some recent result concerning the relationship with Fourier analysis on groups and with sampling theory, and briefly discuss open problems.

## Sobre el Principio de Incertidumbre y aplicaciones

ÓSCAR BLASCO

Universitat de València

oscar.blasco@uv.es

**Resumen.** El principio de incertidumbre fue propuesto por Wener Heisenberg en 1927, y afirma que el producto de las incertidumbres de la posición y el momento lineal siempre será mayor o igual que un valor mínimo dado por la constante de Planck,

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}.$$

Coloquialmente hablando, este principio nos indica que es físicamente imposible medir simultáneamente la posición y el momento lineal exacto de una partícula. Además, haremos una revisión de las aplicaciones que tiene el principio de incertidumbre al estudio de fluctuaciones cuánticas, a la ecuación de Dirac y a la Ecuación de Schrödinger.

## Approximation properties of Parseval frames via extension principles

CHAHLA BOUKEFFOUS

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Alicante

chahlaboukeffous@gmail.com

**Resumen.** From two functions in the Hilbert space  $L^2(\mathbb{R}^d)$  whose Fourier transform has certain decay, one defines a quasi-projection operator. In this talk, we prove necessary and sufficient conditions on those functions in order to the associated quasi-projection operator provides a desired approximation order and density order. To give our conditions we will use the classical notion of approximate continuity. As a consequence, we obtain approximation properties of dual wavelet frame constructed by Mixed Oblique Extension Principle.

## Boundary profile for certain Hamilton-Jacobi equations

CARLOS ESTEVE

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

c.esteve@ua.es

### ***Resumen.***

We consider the boundary and initial-boundary value problem for some Hamilton-Jacobi equations arising in control theory and differential games. It is well-known that viscosity solutions for these problems may develop discontinuities on the boundary. In this talk, I will present some recent results that describe the behaviour of the solution near the boundary. Particularly, I will focus on, first, characterising the part of the boundary on which the boundary conditions are satisfied in the classical sense; and then, describing the profile of the solution on the parts of the boundary where the solution is discontinuous. nt results on harmonic mappings in the plane  $F_0 + \overline{G_0}$  satisfying this latter condition.

# Fatou type theorems for Poisson integrals associated with the Hermite operator

GUSTAVO GARRIGÓS, G. FLORES AND B. VIVIANI.

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

gustavo.garrigos@um.es

## *Resumen.*

We consider the problem of pointwise convergence of Poisson-type integrals at a point  $x_0$  under the mild condition

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x_0)} f(x) dx = f(x_0),$$

which is weaker than usual Lebesgue point requirement.

Such result was proved by Fatou in 1906 for the classical Poisson integrals, and can be extended to approximate identities of convolution type with radially decreasing kernels.

Here we consider Poisson integrals related with the Hermite operator  $L = -\Delta + |x|^2$ , for which the associated Poisson kernel  $P_t(x, y)$  is not of convolution type, nor radially decreasing. Yet, we are able to show that the above result holds when the dimension  $n \leq 3$ , and fails when  $n > 3$ .

This work is part of a joint project with the Argentinian mathematicians G. Flores and B. Viviani.

# Smoothing Effects of Epi-convergence and Infimal convolution in Optimization

MOHAMMED IBRAHIME ABDELKAYOUM GHITRI

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

moghitri@gmail.com

**Resumen.** We use smoothing processes based on the infimal convolution of convex, proper and lower semi-continuous functions to regularize optimization problems given by convex-composite functions. We show that the proposed regularization schemes still (epi)converge to the original data, even if the chosen kernel is an arbitrary convex function. This also allows, without the use of qualifying conditions (namely, BCQ-type conditions), to derive upper estimates of the subdifferentials of the epi-limits of non-convex functions

# Índice numérico en espacios bidimensionales: avances y aplicaciones

ANTONIO JOSÉ GUIRAO SÁNCHEZ

Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

anguisa2@mat.upv.es

**Resumen.** En esta charla presentaremos algunos avances recientes en el cálculo del índice numérico en espacios de dimensión dos, con especial atención a casos como los espacios *Lipschitz free* y los espacios  $\ell_p$ . Se discutirán resultados concretos y técnicas desarrolladas en este contexto, que podrían resultar útiles para el estudio más general de estructuras finito-dimensionales en el análisis funcional.

## On harmonic univalent functions

MARÍA JOSÉ MARTÍN

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna

mmartigo@ull.edu.es

### *Resumen.*

The Eulerian description of the two-dimensional motion of an ideal homogeneous fluid is obtained by imposing the law of mass conservation  $u_x + v_y = 0$  and Euler's equation of motion

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vv_y = -P_x, \\ v_t + uv_x + vu_y = -P_y, \end{cases}$$

where  $(u(t, x, y), v(t, x, y))$  is the velocity field in the time and space variables  $(t, x, y)$  and the scalar function  $P(t, x, y)$  represents the pressure.

Starting with a simply connected domain  $\Omega_0 \subset \mathbb{C}$ , representing the labeling domain, each label  $(a, b) \in \Omega_0$  identifies by means of the *injective* map

$$(a, b) \mapsto (x(t; a, b), y(t; a, b)) = x(t; a, b) + iy(t; a, b) \quad (1)$$

the evolution in time of a specific particle, the fluid domain at time  $t$ ,  $\Omega(t)$ , being the image of  $\Omega_0$  under the map (1).

Let  $F_0$  and  $G_0$  be two analytic functions in  $\Omega_0$ . Assume that  $F_0$  is locally univalent, that  $|G'_0(z)/F'_0(z)| < 1$  for all  $z \in \Omega_0$ , and that  $F'_0$  and  $G'_0$  are linearly independent. Define, for  $\nu_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\xi_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , and  $z = a + ib \in \Omega_0$ ,

$$\begin{cases} f(t, z) = e^{i\nu_0 t} F_0(z), \\ g(t, z) = e^{i(\xi_0 - \nu_0)t} G_0(z). \end{cases}$$

It is known that, then,  $f(t, z) + \overline{g(t, z)} = x(t; a, b) + iy(t; a, b)$  is an explicit solution to the two-dimensional motion of an ideal homogeneous fluid, provided that  $F_0 + \lambda \overline{G_0}$  is univalent in  $\Omega_0$  for all  $|\lambda| = 1$ . In our talk, we will review some recent results on harmonic mappings in the plane  $F_0 + \overline{G_0}$  satisfying this latter condition.

## Solution to open problems going back to Joram Lindenstrauss

JOSÉ ORIHUELA, VICENTE MONTESINOS

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

joseori@um.es

**Resumen.** Let  $E$  be a Banach space and  $F$  a norming subspace in  $E^*$ . The Banach space  $E$  admits an equivalent  $\sigma(E, F)$ -lower semicontinuous and rotund norm whenever it has another one with  $\sigma(E, F)$ -closed faces which have separable support.

For a compact topological space  $(K, \mathcal{T})$  we prove that  $C(K)$  admits an equivalent pointwise lower semicontinuous rotund norm whenever the support of every probability measure on  $K$  is metrizable. Our approach do not use either retractions on  $K$  or projections in  $C(K)$ .

This results provides us a way to find the answer to another **open question** proving that **every Banach space with a Fréchet differentiable norm has an equivalent locally uniformly rotund norm.**

# The class of $c$ -almost periodic functions defined on vertical strips in the complex plane

HADJER OUNIS

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Alicante

chadjerounis413@gmail.com

## *Resumen.*

In this paper, we develop the notion of  $c$ -almost periodicity for functions defined on vertical strips in the complex plane. As a generalization of Bohr's concept of almost periodicity, we study the main properties of this class of functions which was recently introduced for the case of one real variable. In fact, we extend some important results of this theory which were already demonstrated for some particular cases. In particular, given a non-null complex number  $c$ , we show that the family of vertical translates of a prefixed  $c$ -almost periodic function defined in a vertical strip  $U$  is relatively compact on any vertical substrip of  $U$ , which leads to proving that every  $c$ -almost periodic function is also almost periodic and, in fact,  $c^m$ -almost periodic for each integer number  $m$ .

## La persistencia del inradio asintótico

MATÍAS RAJA BAÑO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

matias@um.es

**Resumen.** En el contexto de los espacios de Banach, el término “asintótico” es algo ambiguo, ya que puede hacer referencia a fenómenos que ocurren cuando la dimensión tiende a infinito, o bien cuando se filtra a través de subespacios de codimensión finita. Así pues, el inradio asintótico puede ser entendido en dos sentidos muy diferentes. En la charla estudiamos lo que ocurre con estos inradios asintóticos aplicados a un cubrimiento finito por conjuntos convexos cerrados de la bola unidad de un espacio de Banach infinito-dimensional. Nos encontramos que para una de las nociones, siempre hay algún conjunto del cubrimiento con inradio igual a 1, los que tiene que ver con el fenómeno de concentración de la medida. Para el otro sentido del inradio asintótico, su mayor o menor “persistencia” tiene que ver con la geometría del espacio, encontrando en particular relaciones con los módulos AUC y AUS.

## Cuestiones sobre medidas vectoriales

JOSÉ RODRÍGUEZ RUIZ

Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha

jose.rodriguezruiz@uclm.es

**Resumen.** En esta charla presentaremos algunos avances recientes (y problemas abiertos) alrededor de la teoría de las medidas vectoriales. Más concretamente, nos centraremos en teoremas de tipo Orlicz-Pettis y en resultados sobre la estructura de los retículos de Banach de funciones reales integrables respecto de medidas vectoriales.