Geometría Convexa

Equipo organizador

- María Ángeles Hernández Cifre (Universidad de Murcia)
- Jesús Yepes Nicolás (Universidad de Murcia)

Descripción

La Geometría Convexa es fundamental en muchas ramas de las Matemáticas, tanto puras como aplicadas. Recientes avances destacan además la interacción entre Geometría Convexa y Análisis Convexo Asintótico, con resultados tales como teoremas de límite central para cuerpos convexos y desigualdades de tipo Sobolev logarítmicas con respecto a probabilidades log-cóncavas, mostrando un fuerte sabor geométrico probabilístico. Estas conexiones revelan vínculos entre desigualdades geométricas clásicas y la teoría del transporte óptimo.

La sesión especial busca fomentar la investigación en Geometría Convexa y su relación con áreas cercanas, tales como la Geometría Discreta y la Integral. Asimismo, se pretende contar con ponentes en distintas etapas de su carrera investigadora, incluyendo desde doctorandos y postdocs en una fase inicial, hasta investigadores séniors, con una dilatada trayectoria científica, asegurando también un balance de género. Finalmente, se prevé que los participantes aporten perspectivas diversas, reflejando la variedad de temáticas presentes en Convexidad.

Palabras clave: Convex bodies; Geometric and functional inequalities; Isoperimetric problems; Integral Geometry; Discrete methods; Lattices and Discrete Geometry.

Programa

Jueves, 22 de enero

11:00 – 11:30	Manuel Ritoré (Universidad de Granada) *Pansu-Wulff shapes in Carnot groups*
11:30 – 12:00	César Rosales (Universidad de Granada) *El problema isoperimétrico anisotrópico en dominios convexos*
12:00 – 12:30	Francisco Marín Sola (CUD) *On general versions of the Petty projection inequality*
12:30 – 13:00	Lidia Gordo Malagón (Universidad de Murcia) *Mean type successive radii of convex bodies*
15:30 – 16:00	Eugenia Saorín Gómez (Universität Bremen) *Common projections of convex bodies and inequalities within the L_p Brunn-Minkowski theory*
16:00 – 16:30	David Alonso-Gutiérrez (Universidad de Zaragoza) *Una versión funcional general de la desigualdad de Grünbaum*
16:30 – 17:00	Julia Sánchez-Loscertales (Universidad de Zaragoza) *Sobre la desigualdad de Zhang para funciones log-cóncavas*
17:00 – 17:30	Eduardo Lucas Marín (Universidad de Murcia) *Bridging volume and lattice enumeration via mixed isoperimetric inequalities*
18:00 – 18:30	Bernardo Gónzalez (Universidad de Murcia) *Extremalidad y casos degenerados entre algunos funcionales geométricos*
18:30 – 19:00	Julián Haddad (Universidad de Sevilla) *Planar radial mean bodies are convex*

Viernes, 23 de enero

11:00 – 11:30	Francisco Santos (Universidad de Cantabria) *Lattice zonotopes and the lonely-runner conjecture*
11:30 – 12:00	Luz Roncal (BCAM) *Unique continuation: from discrete to continuous*
12:00 – 12:30	Gil Solanes (Universitat Autònoma de Barcelona) *Integral geometry in pseudo-riemannian spaces*

Pansu-Wulff shapes in Carnot groups

Manuel Ritoré

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

ritore@ugr.es

Resumen. We describe recent work related to the minimizers of the perimeter under a volume constraint in Carnot groups with a sub-Finsler structure, focusing on the case of the Heisenberg groups.

El problema isoperimétrico anisotrópico en dominios convexos

César Rosales

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

crosales@ugr.es

Resumen. Estudiaremos el problema consistente en minimizar el perímetro anisotrópico interior sobre conjuntos de volumen dado dentro de un convexo. Revisaremos brevemente cuáles son las soluciones en dominios concretos. Después, analizaremos las regiones isoperimétricas y la función perfil isoperimétrico en cualquier dominio convexo. Nos centraremos en obtener propiedades de concavidad del perfil y de conexión de las soluciones, así como en comparaciones óptimas respecto de conos convexos. En particular, las técnicas empleadas proporcionarán una prueba rápida de que las únicas soluciones del problema en el espacio euclídeo son las formas de Wulff.

References

[1] C. Rosales (2025). On the anisotropic partitioning problem in Euclidean convex domains. *Submitted (arxiv.org/abs/2504.08345).*

On general versions of the Petty projection inequality

Francisco Marín Sola

Departamento de Ciencias, CUD San Javier

francisco.msola@cud.upct.es

Resumen. The classical Petty projection inequality is an affine isoperimetric inequality which constitutes a cornerstone in the affine geometry of convex bodies. By extending the polar projection body to an inter-dimensional operator, Petty's inequality was generalized to the so-called (L_p, Q) setting, where Q is an m-dimensional compact convex set. In this talk, we will present an extension of the (L_p, Q) Petty projection inequality for rotationally invariant measures with concavity properties, namely, those with γ-concave density (for $\gamma \geq -1/(nm)$). If time permits, we will also discuss empirical analogues of this inequality.

Mean type successive radii of convex bodies

Lidia Gordo Malagón

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

lidia.gordom@um.es

Resumen. For a convex body K of the n-dimensional Euclidean space, we define the successive outer and inner radii, denoted respectively by $\mathrm{R}_i(K)$ and $\mathrm{r}_i(K)$, $i = 1, \ldots, n$, in the following way: $\mathrm{R}_i(K)$ is the smallest radius of a solid cylinder with i-dimensional spherical cross section containing K, whereas $\mathrm{r}_i(K)$ is the radius of the greatest i-dimensional ball contained in K. These measures generalize the well-known functionals diameter, minimal width, circumradius and inradius of K, and they can also be defined via the circunradius/inradius of suitable projections/sections of the convex body K.

Our aim in this talk is to present the known results as well as some extensions and recent developments about them. Furthermore, the relation between the different successive radii and other relevant geometric measures, like the volume or the Gaussian measure, will be also pointed out.

This is a joint work with María Á. Hernández Cifre.

Common projections of convex bodies and inequalities within the L_p Brunn-Minkowski theory

Eugenia Saorín Gómez

ALTA Institute, Universität Bremen

esaoring@uni-bremen.de

Resumen. In this talk we will present some recent improvements of the L_p-Brunn-Minkowski inequality when the involved convex bodies are assumed to share a common projection onto a hyperplane.

In the classical Brunn-Minkowski theory, if the convex bodies K, L are such that their projections onto a hyperplane coincide, namely $P_{u^\perp}(K) = P_{u^\perp}(L)$, for some $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, then the Brunn-Minkowski inequality *linearizes* for all $\lambda \in (0,1)$, i.e., it reads

$$\mathrm{vol}_n\big((1-\lambda)K + \lambda L\big) \geq (1-\lambda)\mathrm{vol}_n(K) + \lambda \mathrm{vol}_n(L).$$

The L_p Brunn-Minkowski inequality, $p \geq 1$ for convex bodies K and L containing the origin establishes

$$\mathrm{vol}_n\big((1-\lambda)K + \lambda L\big)^{p/n} \geq (1-\lambda)\mathrm{vol}_n(K)^{p/n} + \lambda \mathrm{vol}_n(L)^{p/n}.$$

As in the classical case, we will argue that some refinements are indeed possible. However, we will provide a counterexample to the analogue *linearization* of the Brunn-Minkowski inequality in the case $p > 1$, i.e., there are convex bodies containing the origin, K_0 and L_0, which share a common projection onto a hyperplane, satisfying

$$\mathrm{vol}_n\big((1-\lambda)K_0 + \lambda L_0\big)^{p} \geq (1-\lambda)\mathrm{vol}_n(K_0)^{p} + \lambda \mathrm{vol}_n(L_0)^{p}.$$

In view of the latter, we will discuss alternative improvement possibilities for the L_p-Brunn-Minkowski inequality when the convex bodies share a projection, as well as related aspects of that.

This is about joint work with A. Colesanti, N. Lombardi, J. Yepes Nicolás.

Una versión funcional general de la desigualdad de Grünbaum

David Alonso-Gutiérrez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

alonsod@unizar.es

Resumen. La desigualdad de Grünbaum afirma que, dado un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$, cualquier hiperplano H que pase por el centroide de K divide a K en dos partes de volumen mayor o igual que $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ veces el volumen de K.

Esta desigualdad se obtiene, una vez fijada una dirección $u \in S^{n-1}$, la esfera Euclidea en $\mathbb{R}^n$, considerando la función cóncava en su soporte $h(t) = |K \cap (tu + u^{\perp})|^{\frac{1}{n-1}}$, y obteniendo una cota inferior para la cantidad

$$\frac{\int_{g_{n-1}}^{\infty} h(t)^{n-1} dt}{\int_{\mathbb{R}} h(t)^{n-1} dt},$$

donde g_{n-1} es la componente del centroide en la dirección u, dada por $g_{n-1} = \dfrac{\int_{\mathbb{R}} t h(t)^{n-1} dt}{\int_{\mathbb{R}} h(t)^{n-1} dt}$.

En esta charla proporcionaremos, dada una función h cóncava en su soporte y dos parámetros $\alpha, \beta > 0$, cotas inferiores dependientes de α y β para

$$\frac{\int_{g_{\alpha}}^{\infty} h(t)^{\beta} dt}{\int_{\mathbb{R}} h(t)^{\beta} dt},$$

donde $g_{\alpha} = \dfrac{\int_{\mathbb{R}} t h(t)^{\alpha} dt}{\int_{\mathbb{R}} h(t)^{\alpha} dt}$. La desigualdad obtenida permitirá recuperar, como casos particulares, algunas desigualdades conocidas en geometría convexa.

Este es un trabajo conjunto con F. Marín Sola, J. Marín Goñi y J. Yepes Nicolás.

Sobre la desigualdad de Zhang para funciones log-cóncavas

Julia Sánchez-Loscertales

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

julia.sanchez@unizar.es

Resumen. La desigualdad de Zhang afirma que entre todos los cuerpos convexos $K \subseteq \mathbb{R}^n$, la cantidad invariante afín $|K|^{n-1}|\Pi^* K|$, donde $\Pi^* K$ es el cuerpo de proyección polar de K y $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue, se minimiza cuando K es un símplex. Esta desigualdad proporciona una desigualdad inversa a la desigualdad de proyección de Petty, que afirma que dicha cantidad se maximiza cuando K es un elipsoide y proporciona una desigualdad más fuerte que la desigualdad isoperimétrica.

En 1998, Gardner y Zhang proporcionaron una nueva demostración de la desigualdad de Zhang, haciendo uso de de una extensión de la desigualdad de Berwald, que proporciona una desigualdad de Hölder inversa para funciones cóncavas, para parámetros mayores que -1. De esta manera obtuvieron una relación de contenido entre el cuerpo de Ball de parámetro n de la función covariograma de un cuerpo convexo y su cuerpo de proyección polar que implica la desigualdad de Zhang.

En 2020, Alonso-Gutiérrez, Bernués y González Merino desmostraron una versión funcional de la desigualdad de Zhang para funciones log-cóncavas, obteniéndose posteriormente una demostración de contenido análoga a la de Gardner y Zhang en el caso log-cóncavo mediante la extension de una desigualdad de Berwald para funciones log-cóncavas a exponentes mayores que -1. Por otra parte, Alonso-Gutiérrez, Lucas y Martín Goñi han proporcionado recientemente una nueva demostración de la desigualdad de Zhang basada en el uso de la desigualdad de Berwald únicamente para parámetros positivos. Dicha demostración ha sido adaptada para obtener una versión, para la medida discreta dada por el enumerador de puntos del retículo entero, de la relación de contenido demostrada por Gardner y Zhang.

En esta charla veremos que también se puede obtener una demostración de la relación de contenido proporcionada por Gardner y Zhang, en el caso log-cóncavo, utilizando la desigualdad de Berwald para funciones log-cóncavas únicamente con parámetros positivos. Dicha técnica tiene como objetivo adaptarse al caso discreto en el contexto funcional.

Bridging volume and lattice enumeration via mixed isoperimetric inequalities

Eduardo Lucas Marín

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

eduardo.lucas@um.es

Resumen. In the classical isoperimetric problem measurable sets of fixed volume minimizing surface area exist and are, in fact, necessarily Euclidean balls. In discrete settings, however, both the notion of boundary and the appropriate variational framework need to be reconsidered. Recent analogues have been obtained for both the cardinality and the lattice point enumerator, and in both cases, a fruitful approach has been to study the behaviour under cubical expansion of the sets.

With the intent of obtaining a mixed analogue, for bounded sets of prescribed Euclidean volume, we investigate minimizers of the lattice point enumerator under cubical enlargements. Using a suitable tessellation of space and discrete isoperimetric inequalities, we identify minimizers for several regimes of the enlargement parameter. We also propose a conjectural description of the minimizers in the general case.

Finally we show that, unlike in the pure continuous or discrete settings, no set can minimize the functional simultaneously for all enlargement parameters, revealing an inherent obstruction to global optimality in this mixed discrete–continuous isoperimetric problem.

Extremalidad y casos degenerados entre algunos funcionales geométricos

Bernardo González

Departamento de Ingeniería y Tecnología de Computadores, Universidad de Murcia

bgmerino@um.es

Resumen. En 1961 Santaló demostró una desigualdad entre el inradio, circunradio y diámetro de un cuerpo convexo en el plano euclídeo. Además, observó que junto a las demás desigualdades clásicas, estos formaban un sistema completo de desigualdades para dichos funcionales.

En esta charla, voy a mostrar la estructura general de las desigualdades que podemos encontrar entre dichos funcionales cuando los consideramos en un espacio de Banach n-dimensional. Veremos que, esencialmente, existen cinco comportamientos bastante diferenciados entre sí a tener en cuenta. Así mismo, estudiaremos familias típicas extremales para cada comportamiento y cuándo estos comportamientos degeneran a un único punto.

Este es un trabajo junto a René Brandenberg y Mia Runge.

Planar radial mean bodies are convex

Julián Haddad

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla

jhaddad@us.es

Resumen. The radial mean body of parameter $p > -1$ of a convex body $K \subseteq \mathbb{R}^n$ is a radial set R_pK that can be defined as the Ball body of the covariogram function of K, of parameter p.

They were introduced by Gardner and Zhang in 1998, where they proved that R_pK is convex for $p \geq 0$, and conjectured that they are still convex for $p \in (-1, 0)$.

We prove that if $K \subseteq \mathbb{R}^2$ is a convex body in the plane, then R_pK is convex for every $p \in (-1, 0)$.

Lattice zonotopes and the lonely-runner conjecture

Francisco Santos

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria

francisco.santos@unican.es

Resumen. The lonely runner conjecture (LRC) is the following statement formulated by Jörg Wills in 1968: if n "runners" move along a circle of length one, all starting at the origin, each with its own (constant) velocity, then there is a time at which they are all at distance at least $1/(n+1)$ from the origin.

In its shifted version (sLRC) the runners are allowed to start each at a different position and the velocities are assumed distinct (or else giving all runners the same velocity produces an easy counter-example). The conjecture has been approached from different perspectives, and is proved until $n = 6$ in the original version (Barajas and Serra 2008) and $n = 3$ in the shifted version (Cslovjecsek et al. 2022). The latter is based in a reformulation of LRC and sLRC as questions about the covering radii of certain zonotopes, a connection developed by Malikiosis and Schymura (2017).

In this talk I will review the conjecture and its relation to zonotopes and covering radii, and will show that, both in the original and the shifted versions, if the conjecture holds for integer velocities adding up to at most n^{2n} then it holds for arbitrary velocities. This improves a recent result of Terence Tao, who proved the same with a bound of n^{Cn^2} instead. We then use this bound to computationally prove the shifted version of the conjecture in the first open case, $n = 4$.

The first part is joint with Malikiosis and Shymura, and the second part with Alcántara and Criado.

Unique continuation: from discrete to continuous

Luz Roncal

Basque Center for Applied Mathematics

lroncal@bcamath.org

Resumen. Discrete and continuous elliptic operators often exhibit different unique continuation properties: uniqueness features which hold in the continuous setting stop being true in discrete scenarios: motivating examples which show failure of weak unique continuation are provided in the literature for discrete harmonic functions and for discrete stationary Schrödinger equations.

We will give an overview of recent results on unique continuation properties for solutions of discrete equations on a lattice $(h\mathbb{Z})^d$. By discussing quantitative forms of unique continuation, we will illustrate that these properties can be recovered if small correction terms (in the lattice size) are added. We will be interested in both local and nonlocal models.

Based on joint works with Aingeru Fernández-Bertolin, Angkana Rüland, and Diana Stan.

Integral geometry in pseudo-riemannian spaces

Gil Solanes

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona

gil.solanes@uab.cat

Resumen. The Lipschitz-Killing invariants, discovered by Weyl in his tube formula, are among the most fundamental riemannian invariants. Remarkably, they can be extended to several classes of singular subspaces of a riemannian manifold. Under this form, they belong to a type of functionals called valuations, and they constitute a natural generalization of the intrinsic volumes from convex geometry. I will present a joint project with Andreas Bernig and Dmitry Faifman where we extend the Lipschitz-Killing valuations to the pseudo-riemannian setting. The main difficulty is the appearance of diverging integrals related to the existence of light directions. Our approach, based on distributions, has led in particular to a Gauss-Bonnet formula for metrics of changing signature, and to Crofton formulas in pseudo-riemannian space-forms.