

Geometría Diferencial y Aplicaciones

Equipo organizador

- Cristina Draper Fontanals (Universidad de Málaga)
- Daniel de la Fuente Benito (Universidad de Oviedo)
- Enrique Pendás Recondo (Universidad de Oviedo)
- Jose Torrente Teruel (Universidad de Córdoba)

Descripción

En esta sesión abarcamos todos los ámbitos de la geometría diferencial: riemanniana, lorentziana, de Finsler, de Kähler, compleja, subriemanniana, etc. Además de tratar asuntos puramente teóricos, prestamos especial interés por sus aplicaciones a otras ramas de la Ciencia, como puede ser la teoría de la Relatividad, la mecánica newtoniana, las películas de jabón o su relación con los procesos estocásticos, entre otras.

Palabras clave: Geometría diferencial; Geometría lorentziana; Relatividad matemática; Geometría riemanniana; Geometría subriemanniana.

Programa

JUEVES, 22 de enero

- 11:00 – 11:30 Jorge Alcázar González (Universidad de Córdoba)
Simetrías en variedades de Kaehler e hipersuperficies complejas holomórficamente pseudo simétricas en espacios forma complejos.
- 11:30 – 12:00 Marcos Paulo Tassi (Universidad de Granada)
Superficies de Weingarten elípticas en \mathbb{R}^3 con borde plano convexo.
- 12:00 – 12:30 Erasmo Caponio (Politecnico di Bari)
On a generalization of the Matsumoto's slope of a mountain metric.
- 12:30 – 13:00 Jonatan Herrera Fernández (Universidad de Córdoba)
La conjetura de Bartnik en baja regularidad.
- 15:30 – 16:00 Erik Sarrión Pedralva (Universidad Rey Juan Carlos)
Moment spectrum comparisons in Riemannian manifolds.
- 16:00 – 16:30 José S. Santiago (Universidad de Jaén)
On the characterization of immersions via fundamental data.
- 16:30 – 17:00 Diego A. Marín (Universidad de Granada)
Geometry of f -extremal domains in the 2-sphere.
- 17:00 – 17:30 Martín de la Rosa (Universidad de Córdoba)
Trayectorias de partículas relativistas dependientes de las curvaturas de Frenet en espaciotiempos Brinkmann.
- 18:00 – 18:30 Tjaša Vrhovnik (Universidad de Granada)
Every nonflat conformal minimal surface is homotopic to a proper one.
- 18:30 – 19:00 Didier A. Solis Gamboa (Universidad de Yucatán)
Subvariedades tipo espacio de codimensión dos inmersas en conos nulos.

Simetrías en variedades de Kaehler e hipersuperficies complejas holomórficamente pseudo simétricas en espacios forma complejos

JORGE ALCÁZAR

Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba

f82algoj@uco.es

Resumen. Las condiciones de simetría de hipersuperficies complejas de variedades de Kaehler con curvatura seccional holomorfa constante han sido ampliamente estudiadas por diversos autores. Es de destacar, en primer lugar, el conocido trabajo de Smyth en el que clasifica las hipersuperficies complejas Einstein de un espacio forma complejo y prueba que tales hipersuperficies son localmente simétricas. Posteriormente, de los trabajos de Ryan y Abe se deduce una clasificación completa de las hipersuperficies complejas semisimétricas de un espacio forma complejo, y los trabajos de Romero estudian las hipersuperficies de complejas Einstein en espacio forma complejos indefinidos. Dando un paso más, en esta charla consideramos hipersuperficies complejas holomorfas pseudo simétricas en un espacio forma complejo y obtenemos una caracterización de estas en función de su segunda forma fundamental, dando ejemplos concretos de dichas hipersuperficies, y abordamos asimismo dicho estudio en el contexto de espacio forma complejos indefinidos.

Los resultados expuestos en esta charla están parcialmente basados en [1] y serán publicados próximamente.

Referencias

- [1] A. Albuje, J. Alcázar, M. Caballero (2023). On the symmetries of the Kaehler manifolds. *Mediterr. J. Math.*, 20, 197.

Superficies de Weingarten elípticas en \mathbb{R}^3 con borde plano convexo

MARCOS PAULO TASSI

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

mptassi@ugr.es

Resumen. Una superficie Σ inmersa en \mathbb{R}^3 es una superficie de Weingarten elíptica si sus curvaturas principales k_1 y k_2 satisfacen una ecuación del tipo $W(k_1, k_2) = 0$, para alguna función $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\frac{\partial W}{\partial k_1} \frac{\partial W}{\partial k_2} > 0$ en $W^{-1}(\{0\})$. Ejemplos conocidos de superficies de Weingarten elípticas incluyen superficies mínimas, de curvatura media constante y de curvatura gaussiana positiva constante.

En 1996, A. Ros y H. Rosenberg demostraron que para una curva estrictamente convexa $\Gamma \subset \{z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, existe una constante h que depende únicamente de la curva Γ tal que cualquier superficie compacta embebida en $\mathbb{R}_+^3 := \{z \geq 0\}$ con curvatura media constante $H \leq h$ debe ser topológicamente un disco cerrado.

En esta charla, presentaremos una generalización del Teorema de Ros-Rosenberg para superficies de Weingarten elípticas en \mathbb{R}^3 , discutiendo su demostración, que se basa en algunas técnicas de Análisis Geométrico como el Principio del Máximo y el Método de Reflexión de Alexandrov, así como en la reciente clasificación de superficies de Weingarten elípticas de revolución obtenida por I. Fernandez y P. Mira.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con con B. Nelli y G. Pipoli.

On a generalization of the Matsumoto's slope of a mountain metric

ERASMO CAPONIO

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management, Politecnico di Bari

erasmo.caponio@poliba.it

Resumen. Matsumoto's metric describing the motion of a walker on a slope of mountain under the action of gravity can be generalized to the case when a component of the gravity transversal to the motion is considered (also with tractions coefficients) as shown in some recent works. This generalization is obtained by a wind Finslerian modification of the Matsumoto's metric. We show in this talk that a Finsler metric in this general setting can be obtained by using the same idea in Matsumoto's construction.

La conjetura de Bartnik en baja regularidad

JONATAN HERRERA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba

jherrera@uco.es

Resumen. Desde el artículo inicial de Kunzinger y Sämann sobre espacios de longitud lorentzianos [1], el interés por desarrollar una aproximación sintética a la geometría de Lorentz no ha hecho más que crecer. Esto queda patente por la cantidad de teoría que se ha desarrollado en este nuevo ambiente, incluyendo un análisis de la escalera causal [2] o versiones del teorema de Bonnet [3] y el teorema del splitting de Topogonov [4], entre otros.

En esta charla mi objetivo es mostrar como es posible dar una prueba sintética de la conjetura de Bartnik bajo condiciones adicionales de curvatura. Para ello utilizaremos que, en el contexto de espacios de longitud lorentzianos, es posible definir una noción adecuada de curvatura acotada inferior/superiormente, la cual será suficiente para nuestro objetivo.

Referencias

- [1] M. Kunzinger, C. Sämann (2018). Lorentzian length spaces. *Ann. Global Anal. Geom.* 54 399–447.
- [2] L. Ake Hau, A. Cabrera Pacheco, D.A. Solís (2020). On the causal hierarchy of Lorentzian length spaces. *Class. Quantum Grav.* 37(21).
- [3] T. Beran, L. Napper, F. Rott (2025). Alexandrov’s Patchwork and the Bonnet-Myers Theorem for Lorentzian length spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 378, 2713–2743.
- [4] T. Beran T, A. Ohanyan, F. Rott, D.A. Solís (2023). The splitting theorem for globally hyperbolic Lorentzian length spaces with non-negative timelike curvature. *Lett. Math. Phys.* 113(2), 48.
- [5] J.L. Flores, J. Herrera, D.A. Solís (2024). arXiv:2412.08967.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con el Prof. José Luis Flores (U. de Málaga) y el Prof. Didier A. Solís (U. Autónoma de Yucatán) [5].

Moment spectrum comparisons in Riemannian manifolds

ERIK SARRIÓN PEDRALVA, VICENTE PALMER

Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de los Materiales y Tecnología Electrónica,
Universidad Rey Juan Carlos

erik.sarrion@urjc.es

Resumen. We will show some explicit upper and lower bounds for the averaged moment spectrum, and the torsional rigidity of a geodesic ball in a Riemannian manifold which satisfies that the mean curvatures of the geodesic spheres included in it, (up to its boundary), are controlled by the radial mean curvature of the geodesic spheres with same radius centered at the center of a rotationally symmetric model space. As a consequence, we prove that equality between the first eigenvalues characterizes the moment spectrum and vice-versa.

Referencias

- [1] Vicente Palmer, Erik Sarrión-Pedralva (2024). First Dirichlet Eigenvalue and Exit Time Moment Spectra Comparisons. *Potential Analysis*, vol. 60(1), 489-531.

On the characterization of immersions via fundamental data

JOSÉ S. SANTIAGO

Departamento Matemática Aplicada, Universidad de Jaén

jssantia@ujaen.es

Resumen. In this talk, we will explore the characterization of immersions in certain spaces via certain analytical objects. We will show how this approach can be adapted to address different types of geometric problems, illustrating its versatility through several examples: the characterization of constant mean curvature (CMC) surfaces in terms of holomorphic data, the characterization of surfaces in terms of certain vector fields and the characterization of surfaces sharing the same Gauss map.

Geometry of f -extremal domains in the 2-sphere

DIEGO A. MARÍN

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

damarin@ugr.es

Resumen. Given a riemannian manifold (M, g) and a Lipschitz function $f \in C(\mathbb{R}^2)$, we say that a domain $\Omega \subset M$ with C^2 -boundary is an f -extremal domain if it supports a solution to the overdetermined elliptic problem (OEP)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u + f(u|\nabla u|) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u > 0, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \\ \langle \nabla u, \eta \rangle = \alpha_i, & \text{on } \Gamma_i \subset \partial\Omega, \end{array} \right.$$

where η is the outer conormal to $\partial\Omega$ and $\alpha_i \leq 0$ is a constant on each connected component $\Gamma_i \subset \partial\Omega$. It is a well known fact in the literature that the theory of the existence and rigidity of f -extremal domains is closely linked to the theory of constant mean curvature surfaces (CMC) in M .

In this talk, we will explore this connection for f -extremal domains in \mathbb{S}^2 . In particular, using techniques from the theory of CMC-surfaces, we will demonstrate that, under certain conditions on the function f and the topology of the domain Ω , an f -extremal domain in \mathbb{S}^2 must exhibit significant symmetry. We will also demonstrate how these techniques can be applied to study capillary CMC surfaces in the unit ball, a topic that has received a great deal of attention in recent years.

This talk is based on joint work with my supervisor, Jose M. Espinar.

Trayectorias de partículas relativistas dependientes de las curvaturas de Frenet en espaciotiempos Brinkmann

MARTÍN DE LA ROSA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba

f42rodim@uco.es

Resumen. En esta charla se presentarán resultados preliminares acerca de la dinámica de modelos de partículas relativistas en espaciotiempos Brinkmann de especial relevancia física [1]. Los modelos considerados son extensiones del modelo de la partícula relativista libre que contienen términos que dependen linealmente de las curvaturas de Frenet de la trayectoria, siguiendo la idea popularizada por M.S. Plyushchay [2]. Matemáticamente, se trata de estudiar el problema variacional asociado a funcionales dados por la integral sobre la curva de una combinación lineal de las curvaturas de Frenet, posiblemente junto con un término constante. Se prestará especial atención a las trayectorias que estén contenidas en un frente de onda. Asimismo, se establecerá una comparación con las trayectorias conocidas para esta misma clase de funcionales en espaciotiempos Robertson-Walker generalizados [3].

Referencias

- [1] J. A. Candela, J. L. Flores y M. Sánchez (2003). On general plane fronted waves. *Geodesics. General Relativity and Gravitation* 35, 631–649.
- [2] M. S. Plyushchay (1989). Massive relativistic point particle with rigidity. *International Journal of Modern Physics A*, 4, 15, 3851–3865.
- [3] J. Herrera, M. de la Rosa y R. M. Rubio. (2024). On the geometry and dynamics of relativistic particles in generalized Robertson–Walker spacetimes. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. SIAM J. Sci. Comput.*, 2450048.

Every nonflat conformal minimal surface is homotopic to a proper one

TJAŠA VRHOVNIK

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

vrhovnik@ugr.es

Resumen. Given an open Riemann surface M , we prove that every nonflat conformal minimal immersion $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) is homotopic through nonflat conformal minimal immersions $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ to a proper one. If $n \geq 5$, it may be chosen in addition injective, hence a proper conformal minimal embedding. Prescribing its flux, as a consequence, every nonflat conformal minimal immersion $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ is homotopic to the real part of a proper holomorphic null embedding $M \rightarrow \mathbb{C}^n$. We also obtain a result for a more general family of holomorphic immersions from an open Riemann surface into \mathbb{C}^n directed by Oka cones in \mathbb{C}^n .

Subvariedades tipo espacio de codimensión dos inmersas en conos nulos

DIDIER A. SOLIS GAMBOA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Yucatán

didier.solis@correo.uady.mx

Resumen. En el contexto de la relatividad general, las secciones de horizontes de eventos son objetos clave para la formulación de algunos de sus resultados más icónicos, como los teoremas de singularidad o el teorema del área. Estos objetos -subvariedades tipo espacio de codimensión 2- que se encajan en hipersuperficies luminosas han sido estudiadas desde los principios de la relatividad, y más recientemente desde una perspectiva conforme. En esta charla abordaremos una serie de resultados en esta dirección en el contexto de una clase general de hipersuperficies luminosas, llamadas conos nulos, y estudiamos de manera particular diversos ejemplos que incluyen el cono de luz y cilindros luminosos en el espacio de Minkowski, así como superficies totalmente umbílicas en el espacio de De Sitter.

Agradecimientos. Trabajo conjunto con L. Alías, J. Meléndez y M. Navarro.