

Teoría de nudos

Equipo organizador

- Federico Cantero Morán (Universidad Autónoma de Madrid)
- Marithania Silvero Casanova (Universidad de Sevilla)

Descripción El objetivo de esta sesión es reunir a algunos de los investigadores que actualmente desarrollan su trabajo en teoría de nudos en España, en un momento de creciente actividad en el área. Los participantes provienen de comunidades diversas como la teoría de grupos, las singularidades, las superficies de Riemann, la geometría simpléctica o la topología algebraica, lo que refleja el carácter transversal y enriquecedor de esta disciplina.

Con esta sesión, además de dar visibilidad al trabajo en Teoría de nudos de la comunidad matemática española, aspiramos a fomentar nuevas sinergias en el área y a consolidar una red de colaboración que impulse el desarrollo de la teoría de nudos en el contexto nacional.

Esta actividad cuenta con el apoyo de la Red Española de Topología (RET).

Palabras clave: nudos; trenzas; topología en dimensión baja; invariantes.

Programa

LUNES, 19 de enero

- 15:30 – 16:00 Ana García Lecuona (University of Glasgow)
Distinguiendo clases de concordancia en nudos mutantes
- 16:00 – 16:30 Raquel Díaz Sánchez (Universidad Complutense de Madrid)
Patrones de torsión en la homología de Khovanov (I)
- 16:30 – 17:00 Pedro González Manchón (Universidad Politécnica de Madrid)
Patrones de torsión en la homología de Khovanov (II)
- 17:00 – 17:30 Antonio Costa González (Universidad Nacional de Educación a Distancia)
On symmetries of alternating knots

MARTES, 20 de enero

- 11:00 – 11:30 Marc Kegel (Universidad de Sevilla)
Cirugía de Dehn y trazas de nudos
- 11:30 – 12:00 Francisco Javier Martínez Aguinaga (Universidad Complutense de Madrid)
Nudos legendrianos: flexibilidad y rigidez
- 12:00 – 12:30 Álvaro del Valle Vilchez (Universidad de Sevilla)
Sobre el género de Turaev y el índice de arco de un enlace
- 15:30 – 16:00 Juan González-Meneses López (Universidad de Sevilla)
3-trenzas positivas, homología de Khovanov y teoría de Garside
- 16:00 – 16:30 Benjamin Bode (Universidad Politécnica de Madrid)
Braided open books
- 16:30 – 17:00 Miguel Orbegozo Rodríguez (ETH - Zurich)
Trasladando técnicas de open books a enlaces no fibrados
- 17:00 – 17:30
- 18:00 – 18:30 Jorge Becerra Garrido (Université Bourgogne Europe)
Álgebras XC e invariantes cuánticos de nudos
- 18:30 – 19:00 Ángel González Prieto (Universidad Complutense de Madrid)
Quantization of Alexander invariants through representation theory

Distinguiendo clases de concordancia en nudos mutantes

ANA GARCÍA LECUONA

University of Glasgow

Ana.Lecuona@glasgow.ac.uk

Resumen. La clase de nudos slice consiste en todos los nudos concordantes al nudo trivial, esto es, aquellos nudos en la esfera tridimensional que son el borde de un disco encajado en la bola de cuatro dimensiones. Dos nudos son mutantes si podemos obtener el uno a partir del otro a través de una rotación sobre una esfera de Conway. Es un problema difícil distinguir en concordancia nudos mutantes, principalmente porque comparten muchos invariantes, entre ellos la cubierta doble ramificada sobre la esfera. En esta charla presentaremos un método para solventar estas dificultades basado en la teoría desarrollada por Casson y Gordon sobre nudos homotópicamente ribbon. Este trabajo es una colaboración con Andy Wand.

Patrones de torsión en la homología de Khovanov (I)

RAQUEL DÍAZ SÁNCHEZ

Universidad Complutense de Madrid

radiaz@mat.ucm.es

Resumen. La homología de Khovanov, introducida por Mikhail Khovanov en 1998, es una herramienta que refina el polinomio de Jones en la teoría de nudos, proporcionando un invariante homológico más potente. En esencia, a cada nudo se le asigna una colección de complejos de cadenas, y las homologías de estos complejos es el invariante de Khovanov. Este invariante puede distinguir nudos con el mismo polinomio de Jones, y es especialmente útil para analizar la estructura de nudos y enlaces complejos. Una conjetura debida a Shumakovitch afirma que todo nudo (salvo unas pocas y concretas excepciones), tiene torsión en su homología de Khovanov. Esta es la primera de dos charlas en las que analizaremos algunos patrones de torsión que permiten determinar elementos concretos de torsión en la homología de importantes familias de nudos y enlaces. Se describirán resultados del artículo [1]. Trabajo conjunto con Pedro M. G. Manchón.

[1] Díaz, R. and Manchón, P. M. G.: A pattern for torsion in Khovanov homology. *Fund. Math.* 270 (2025), no. 1, 75–97.

Patrones de torsión en la homología de Khovanov (II)

PEDRO GONZÁLEZ MANCHÓN

Universidad Politécnica de Madrid

pedro.gmanchon@upm.es

Resumen. Esta es la segunda de dos charlas en las que analizaremos algunos patrones de torsión que permiten determinar elementos concretos de torsión en la homología de importantes familias de nudos y enlaces. Veremos también cómo podemos utilizar cierto tipo de submódulos del complejo de cadenas para distinguir elementos de torsión que se encuentran en el mismo módulo de homología de Khovanov. Finalmente mostraremos varias aplicaciones para familias de trenzas de tres cuerdas, enlaces pretzel y enlaces racionales. Estos resultados están recogidos en el preprint [2]. Trabajo conjunto con Raquel Díaz.

[2] Díaz, R. and Manchón, P. M. G.: New torsion patterns in Khovanov homology, arXiv:2508.00606, 25 pages.

On symmetries of alternating knots

ANTONIO COSTA GONZÁLEZ

Universidad Politécnica de Madrid

acosta@mat.uned.es

Resumen. For any geometrical object, it is natural to study its symmetries and this has also been one of the classical problems in knot theory. The simplest symmetries for knots are certainly those given by a rotation around an axis of the space. We will say that a knot K is q -periodic if there is a rotation of order q that leaves K invariant (in the case $q = 2$, the axis of the rotation must not intersect the knot).

The easiest way to find symmetries of a knot is on its projections. A projection is q -periodic if there is a rotation of order q of the plane leaving the projection of the knot invariant with its overpasses and underpasses. Determining whether a projection of a knot K is q -periodic is something that can be done, but the problem is to determine in which of the infinite projections of K the symmetries are to be found. The main theorem implies that for alternating knots, the possible q -periodicities with $q > 2$ can be “visualized” on alternating projections.

Finally other types of symmetries in the same context will be considered.

Cirugía de Dehn y trazas de nudos

MARC KEGEL

Universidad de Sevilla

kegelmarc87@gmail.com

Resumen. Dado un nudo K en una 3-esfera, podemos construir nuevas 3- y 4-variedades de K haciendo cirugía en K o adjuntando un asa cuatridimensional de índice 2 a la 4-bola a lo largo de K . En esta ponencia, vamos a discutir los resultados nuevos que responden a si K está determinada por estas 3- y 4-variedades.

Nudos legendrianos: flexibilidad y rigidez

FRANCISCO JAVIER MARTÍNEZ-AGUINAGA

Universidad Complutense de Madrid

frmart02@ucm.es

Resumen. La teoría de Nudos Legendrianos estudia nudos tangentes a una distribución de contacto en el espacio 3-dimensional. Es conocido que todo nudo admite un representante Legendriano. Sin embargo, el espacio de nudos legendrianos y el espacio de todos los nudos presentan diferencias a nivel homotópico. Esto se puede apreciar ya a nivel de componentes conexas: existen pares de nudos legendrianos que no son isótopos a través de nudos Legendrianos a pesar de serlo a nivel topológico. En esta charla discutiremos cuestiones sobre flexibilidad/rigidez entre estos espacios a nivel de grupos fundamentales.

Sobre el género de Turaev y el índice de arco de un enlace

ÁLVARO DEL VALLE VÍLCHEZ

Universidad de Sevilla

adelvalle3@us.es

Resumen. Determinar si un nudo o enlace es alternante (es decir, si admite un diagrama alternante) es, en general, un problema complicado. En este marco, el género de Turaev g_T surge como un invariante numérico que mide qué tan lejos se encuentra un enlace de ser alternante. En esta charla exploraremos la relación entre g_T y otro invariante numérico, el índice de arco α . En particular, proponemos la siguiente conjetura:

$$c(L) + 2 - \alpha(L) \geq 2g_T(L)$$

para cualquier enlace primo y no separado L , donde $c(L)$ es el número de cruces de L . Presentaremos distintas estrategias y técnicas para demostrar esta conjetura en familias significativas de enlaces, incluyendo enlaces adecuados, clausuras de 3-trenzas positivas, enlaces tóricos y nudos de Kanenobu. Trabajo en colaboración con Adam M. Lowrance.

3-trenzas positivas, homología de Khovanov y teoría de Garside

JUAN GONZÁLEZ-MENESES LÓPEZ

Universidad de Sevilla

meneses@us.es

Resumen. Trabajo conjunto con Álvaro del Valle y Marithania Silvero. En esta charla, a partir de una clasificación de las clases de conjugación de trenzas de 3 cuerdas (3-trenzas) proveniente de la teoría de Garside, determinaremos las primeras cuatro columnas (grado homológico) y las tres columnas inferiores (grado cuántico) de la homología de Khovanov de una 3-trenza positiva. Además, el número de filas y columnas que podemos describir aumenta con el ínfimo de la trenza, una noción de la teoría de Garside que veremos cómo calcular y cómo maximizar en la clase de conjugación de la trenza.

Braided open books

BENJAMIN BODE

Universidad Politécnica de Madrid

benjamin.bode@upm.es

Resumen. An open book consists of a link (the “binding”) and the fiber surfaces of a fibration of the link complement over the circle (the “pages”) with a specified behaviour in a tubular neighbourhood of the binding. In particular, in the 3-sphere the bindings of open books are exactly the fibered links. It is a classical result by Alexander that every link is the closure of some braid. In this talk I will discuss what it means for an open book to be braided. Roughly speaking, there should be a “braid axis” O such that the binding is braided relative to O , but also all the fiber surfaces should have a natural position relative to O . I will present new results and constructions of such braided open books.

Trasladando técnicas de open books a enlaces no fibrados

MIGUEL ORBEGOZO RODRÍGUEZ

ETH - Zurich

miguel.orbegozo@unine.ch

Resumen. Un enlace fibrado es aquel cuyo complemento en S^3 admite un fibrado sobre S^1 . En este caso, su complemento está determinado por una superficie S (la fibra), y un difeomorfismo h de S . Esto permite estudiar propiedades de enlaces fibrados mediante difeomorfismos de superficies. El objetivo de esta charla es mostrar como técnicas de open books pueden utilizarse más generalmente para cualquier enlace. En particular, resultados conocidos para enlaces fibrados, tales como comportamiento bajo sumas de Murasugi y criterios de primalidad, así como resultados de geometría de contacto, tienen una versión análoga para enlaces no fibrados. En colaboración con Peter Feller y Lukas Lewark.

Álgebras XC e invariantes cuánticos de nudos

JORGE BECERRA GARRIDO

Université Bourgogne Europe

Jorge.Becerra-Garrido@u-bourgogne.fr

Resumen. Las álgebras de Hopf de cinta y sus representaciones permiten construir invariantes cuánticos de nudos, enlaces y enredos que recuperan invariantes clásicos como el polinomio de Alexander o el de Jones. El objetivo de esta charla es doble: por una parte, presentaré la estructura algebraica mínima necesaria para producir un invariante cuántico al estilo de Lawrence (las llamadas álgebras XC); y por otra parte, explicaré cómo este invariante puede codificarse de modo natural en un funtor monoidal que extiende el famoso funtor de Reshetikhin-Turaev. Finalmente, indicaré cómo este enfoque generaliza canónicamente a un invariante cuántico de nudos y enredos virtuales.

Quantization of Alexander invariants through representation theory

ÁNGEL GONZÁLEZ PRIETO

Universidad Complutense de Madrid

angelgonzalezprieto@ucm.ess

Resumen. The Alexander polynomial is one of the most celebrated knot invariants due to both its computational simplicity and its many deep connections with other knot-theoretic features. This talk explores a novel geometric framework for understanding classical Alexander-type invariants of knots through the lens of representation varieties.

Specifically, we shall examine the moduli space of representations of knot groups into the affine group of a line, showing that its coordinate ring is naturally isomorphic to the symmetric algebra of the Alexander module of the knot. This identification leads to a conceptual description of the Alexander polynomial as the singular locus of a singular vector bundle, whose fibers correspond to representation varieties of the knot quandle. Time permitting, we will also discuss how a 3-dimensional Topological Quantum Field Theory (TQFT) can be constructed to quantise Alexander invariants, linking with classical tools such as Burau representations of braid groups.

Joint work with J. Martínez-Martínez and V. Muñoz.