Análisis Geométrico

Equipo organizador

- Esther Cabezas-Rivas (Universitat de València)
- Vicente Miquel (Universitat de València)

Descripción

Esta sesión especial reúne avances recientes en Análisis Geométrico, centrados en subvariedades, curvatura y estructuras métricas especiales. Se abordarán resultados sobre superficies mínimas, inmersiones isométricas, estabilidad en problemas de capilaridad, así como resultados sobre curvatura en espacios homogéneos y simétricos. También se presentarán avances en transporte óptimo, flujos geométricos (solitones) y ecuaciones de campo de Einstein en geometrías con densidad. Se explorarán métodos geométricos, analíticos y topológicos para entender fenómenos clásicos y desafíos actuales, como la rigidez isométrica, la inestabilidad de Rayleigh o el problema de Bernstein. Las ponencias combinan técnicas de Geometría Global, Ecuaciones Diferenciales, espacios de Wasserstein, y cálculo variacional. La sesión está pensada para fomentar el intercambio de ideas entre investigadores en diferentes subáreas del Análisis Geométrico, creando sinergias que permitan abordar nuevos retos y problemas abiertos.

Palabras clave: Geometría Riemanniana; Superficies mínimas; Curvatura; Espacios homogéneos; Ecuaciones en derivadas parciales geométricas.

Programa

Lunes, 19 de enero

15:30 – 16:00	Pablo Mira Carrillo (Universidad Politécnica de Cartagena) *Esferas saddle de la esfera unidad tridimensional*
16:00 – 16:30	Florent Balacheff (Universitat Autònoma de Barcelona) *Complete 3-manifolds of positive scalar curvature with quadratic decay*
16:30 – 17:00	Irene Ortiz (Universidad de Murcia) *The Plateau-Rayleigh instability of translating lambda-solitons*
17:00 – 17:30	Víctor Sanmartín-López (Universidad Santiago de Compostela) *Curvatura adaptada y cohomogeneidad uno en espacios simétricos*

Martes, 20 de enero

11:00 – 11:30	Miguel Brozos Vázquez (Universidade da Coruña) *Ecuaciones de campo de Einstein en espacio-tiempos con densidad*
11:30 – 12:00	José Miguel Manzano (Universidad de Jaén) *Inmersiones isométricas de superficies en grupos de Lie métricos unimodulares*
12:00 – 12:30	Andrea del Prete (Università degli Studi di Pavia) *Hacia el problema de Bernstein para superficies mínimas en* Sol_3 *mediante una correspondencia con* AdS^3
15:30 – 16:00	Antonio Alarcón (Universidad de Granada) *Propiedades genéricas de las superficies mínimas*
16:00 – 16:30	Antonio Cañete (Universidad de Sevilla) *Stable and isoperimetric regions for the free boundary problem in bounded annuli of revolution with increasing Gauss curvature*
16:30 – 17:00	Miguel Domíngez Vázquez (Universidad Santiago de Compostela) *Normal homogeneous spaces with positive 2-intermediate Ricci curvature*
17:00 – 17:30	Raquel Villacampa (Universidad de Zaragoza) *El espacio de conexiones* $\nabla^{\varepsilon,\rho}$
18:00 – 18:30	Jaime Santos-Rodríguez (Universidad Politécnica de Madrid) *Rigidez y flexibilidad isométrica en espacios de Wasserstein*
18:30 – 19:00	Isabel Fernández (Universidad de Sevilla) *Capillary Surfaces and an Overdetermined Problem in the Sphere*

Esferas saddle de la esfera unidad tridimensional

Pablo Mira, José Antonio Gálvez, Marcos P. Tassi

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad Politécnica de Cartagena

pablo.mira@upct.es

Resumen. Un teorema clásico de Almgren establece que toda superficie compacta de género cero que sea mínima en la esfera unidad tridimensional $\mathbb{S}^3$ es un ecuador, esto es, es totalmente geodésica. En esta charla daremos una extensión puramente geométrica de dicho teorema, probando el siguiente resultado: toda superficie compacta de género cero analítica real en $\mathbb{S}^3$ que sea saddle, esto es, de curvatura extrínseca no positiva, ha de ser un ecuador. Una característica destacable del resultado es que no se impone ninguna EDP geométrica en la superficie, a diferencia del teorema de Almgren. El teorema no es cierto en el caso C^∞. Al hilo de este resultado, expondremos el teorema de los cuatro semicírculos obtenido recientemente en [3] y su aplicación al contexto de superficies en $\mathbb{S}^3$.

Referencias

[1] F. Almgren (1966), Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein theorem, *Ann. Math.*, 84, 277–292.

[2] J.A. Gálvez, P. Mira, M.P. Tassi (2024), Analytic saddle spheres in $\mathbb{S}^3$ are equatorial, *Math. Ann.*, 389, 3865–3884.

[3] J.A. Gálvez, P. Mira (2025), Linearity of homogeneous solutions to degenerate elliptic equations in dimension three, *J. Eur. Math. Soc.*, to appear.

Complete 3-manifolds of positive scalar curvature with quadratic decay

Florent Balacheff, Teo Gil Moreno de Mora Sardà, Stéphane Sabourau

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona y Centre de Recerca Matemàtica

florent.balacheff@uab.cat

Resumen. We will explain how complete Riemannian 3-manifolds whose scalar curvature is positive with a subquadratic decay at infinity decompose as a (possibly infinite) connected sum of spherical manifolds and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ summands. This generalises a result by Gromov [2] and Wang [3] using a more topological approach. This is joint work [1] with Teo Gil Moreno de Mora Sardà and Stéphane Sabourau.

Referencias

[1] F. Balacheff, T. Gil Moreno de Mora Sardà, S. Sabourau (2024). Complete 3-manifolds of positive scalar curvature with quadratic decay, *preprint*, `arxiv.org/pdf/2407.07198`.

[2] M. Gromov (2023). *Four lectures on scalar curvature*. In Perspectives in scalar curvature. Vol. 1, pages 1–514. World Sci. Publ., Hackensack, NJ.

[3] J. Wang (2023). Topology of 3-manifolds with uniformly positive scalar curvature, *preprint*, `arXiv:2212.14383v2`.

The Plateau-Rayleigh instability of translating lambda-solitons

Irene Ortiz, Antonio Bueno, Rafael López

Departamento de Matemáticas, Universdad de Murcia

irene.ortiz@um.es

Resumen.
In 1873, Plateau observed that a stream of water dropping vertically was divided into smaller packets with the same volume but less surface area [3]. Plateau found experimentally that this happened when the length of the stream was greater than about 3,13 times its diameter. Later Rayleigh proved theoretically that a stream of radius r breaks into drops if its length is greater than $2\pi r$ [4]. This behavior is known as the Plateau-Rayleigh instability and it is part of a greater branch of fluid dynamics concerned with fluid thread breakup [2, Ch. 5].
Given a unit vector $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^3$ and $\lambda \in \mathbb{R}$, a translating λ-soliton is a surface in $\mathbb{R}^3$ whose mean curvature H satisfies $H = \langle N, \mathrm{v}\rangle + \lambda,\ |\mathrm{v}| = 1$, where N is the Gauss map of the surface. In this talk, we will explain how to extend the phenomenon of instability of Plateau-Rayleigh for translating λ-solitons of cylindrical type, proving that long pieces of these surfaces are unstable. We will provide explicit bounds on the length of these surfaces. It will be also proved that if a translating λ-soliton is a graph, then it is a minimizer of the weighted area in a suitable class of surfaces with the same boundary and the same weighted volume. This is joint work [1] with Antonio Bueno and Rafael López.

Referencias

[1] J. A. Bueno Linares, R. López Camino and I. Ortiz (2024). The Plateau-Rayleigh instability of translating λ-solitons, *Results Math.* 79, no. 2, Paper No. 58, 21 pp.

[2] P-G De Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré (2004). *Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves.* Springer-Verlag, New York.

[3] J. A. F. Plateau (2018). *Statique Expérimentale et Théorique Des Liquides Soumis Aux Seules Forces Moléculaires.* vol. 2. Gauthier-Villars.

[4] L. Rayleigh (1878/79), On The Instability Of Jets, *Proc. Lond. Math. Soc.* 10, 4–13.

Curvatura adaptada y cohomogeneidad uno en espacios simétricos

Víctor Sanmartín López

Departamento de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela

victor.sanmartin@usc.es

Resumen. Dentro de la Geometría de subvariedades, es natural comenzar por la investigación de aquellas subvariedades con un elevado grado de simetría, como puede ser el caso de las inducidas por acciones de cohomogeneidad uno (see e.g. [1]). Por otro lado, el operador de Jacobi y el operador forma son dos de los operadores más empleados para analizar la curvatura. Cuando conmutan, la subvariedad se dice de curvatura adaptada.

Uno de los objetivos principales de este charla es el de presentar la clasificación de las acciones de cohomogeneidad uno en espacios simétricos de tipo no compacto. Además, veremos que es posible definir la noción de curvatura adaptada para cada acción de cohomogeneidad uno, y analizaremos cuáles de ellas son curvatura adaptada. Por último, si el tiempo lo permite, estudiaremos el concepto de curvatura adaptada en contextos más generales que el homogéneo.

Referencias

[1] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez and T. Otero (2023). Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type and higher rank, *Adv. Math.* 428, Paper No. 109165, 33 pp.

[2] I. Solonenko, V. Sanmartín-López (2025). Classification of cohomogeneity-one actions on symmetric spaces of noncompact type, *preprint*, `arxiv.org/abs/2501.05553`.

Ecuaciones de campo de Einstein en espacio-tiempos con densidad

Miguel Brozos Vázquez, Diego Mojón Álvarez

CITMAga, Departamento de Matemáticas, Universidade da Coruña

miguel.brozos.vazquez@udc.es

Resumen. En un espacio-tiempo dotado de una función de densidad $(M, g, e^{-f} dvol_g)$, introducimos ecuaciones de campo ponderadas que recuperan las ecuaciones de campo de Einstein cuando la densidad es constante [1]. Veremos que estas ecuaciones caracterizan espacio-tiempos con densidad que son puntos críticos de un cierto funcional y reproducen las principales características de las ecuaciones de campo de Einstein [2].
Una vez hayamos motivado las ecuaciones, haremos un recorrido por distintos tipos de soluciones, evidenciando importantes diferencias entre aquellas con ∇f nulo (isotrópicas) y ∇f espacial o temporal (no isotrópicas) [1]. Además, pondremos especial énfasis en soluciones cuyo tensor de Weyl satisface alguna propiedad, dando la clasificación de soluciones localmente conformemente llanas y con tensor de Weyl armónico en dimensión cuatro [2].

Referencias

[1] M. Brozos-Vázquez, D. Mojón-Álvarez (2022). Vacuum Einstein field equations in smooth metric measure spaces: the isotropic case. *Class. Quantum Grav,* 39, No. 13, Article ID 135013, 20 p.

[2] M. Brozos-Vázquez, D. Mojón-Álvarez (2025). The vacuum weighted Einstein field equations. *Math. Z.*, 310, No. 3, 38 p.

Inmersiones isométricas de superficies en grupos de Lie métricos unimodulares

José M. Manzano, I. Castro, José S. Santiago

Departamento de Matemáticas, Universidad de Jaén

jmprego@ujaen.es

Resumen. Se discutirán las ecuaciones fundamentales que debe cumplir una inmersión isométrica de una superficie Riemanniana en un grupo de Lie unimodular tridimensional provisto de una métrica Riemanniana invariante a izquierda. Esto nos permitirá abordar dos problemas: el primero será determinar hasta qué punto la aplicación de Gauss invariante a izquierda determina la inmersión isométrica y el segundo discutir bajo qué supuestos existe una correspondencia de tipo Lawson para superficies de curvatura media constante en grupos de Lie métricos unimodulares. También se comentará cómo algunos de estos resultados se extienden al caso semirriemanniano [1].

Referencias

[1] I. Castro, J. M. Manzano, J. S. Santiago (2025). Isometric immersions into semi-Riemannian three-dimensional unimodular metric Lie groups. *Preprint*.

Hacia el problema de Bernstein para superficies mínimas en Sol_3 mediante una correspondencia con AdS^3

Andrea Del Prete, José Miguel Manzano Prego, José Santiago Santiago Vilanueva

Dipartimento di Matematica "Felice Casorati", Università degli Studi di Pavia

andrea.delprete@unipv.it

Resumen. Sol_3 es uno de los ocho modelos de geometría de Thurston; se trata de un grupo de Lie tridimensional con métrica invariante a izquierda, curvatura negativa variable y grupo de isometrías de dimensión 3. Por otro lado, AdS^3 (espacio anti-de Sitter tridimensional) es un espacio lorentziano de curvatura constante negativa, cuyo grupo de isometrías tiene dimensión 6.
En ambos espacios es natural estudiar superficies que son puntos críticos del funcional área: mínimas en Sol_3, y maximales en AdS^3. Una conexión entre ambas teorías está proporcionada por una *correspondencia de Calabi generalizada*, [1, Theorem 3.1], que asocia grafos mínimos enteros en Sol_3 con grafos maximales enteros definidos sobre un modelo no completo de AdS^3, preservando la estructura conforme de las superficies.
En esta charla se presentarán los distintos modelos geométricos que describen Sol_3 y AdS^3, y se describirán sus isometrías. Se analizará qué isometrías de AdS^3 se conservan mediante la correspondencia y cuáles se pierden, y cómo estas diferencias influyen en la geometría de los grafos mínimos en Sol_3. Se ilustrarán estos fenómenos mediante ejemplos concretos.
Estos resultados constituyen un primer paso hacia la resolución del *problema de Bernstein* para superficies mínimas en Sol_3, y abren una vía prometedora para su futura clasificación global.

Referencias

[1] A. Del Prete, H. Lee, J. M. Manzano (2024). A duality for prescribed mean curvature graphs in Riemannian and Lorentzian Killing submersions. *Math. Nachr.*, 297(5), 1581–1600. `https://doi.org/10.1002/mana.202300282`

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con José Miguel Manzano Prego y José Santiago Santiago Vilanueva de la Universidad de Jaén. Proyecto parcialmente financiado por el proyecto PRIN "Geometry and topology of manifolds" no. F53D23002800001 y por el proyecto MCIN/AEI PID2022-142559NB-I00.

Propiedades genéricas de las superficies mínimas

Antonio Alarcón, Francisco J. López

Departamento de Geometría y Topología e Instituto de Matemáticas (IMAG), Universidad de Granada

alarcon@ugr.es

Resumen. Discutiremos algunas propiedades de las superficies mínimas en el espacio Euclídeo que ocurren de forma genérica en el sentido de la categoría de Baire. Trabajo [1] en colaboración con Francisco J. López.
Con más precisión, sea M una superficie de Riemann abierta y $n \geq 3$ un número entero. Hablaremos de algunas propiedades genéricas (en el sentido anterior) en el espacio de todas las inmersiones mínimas conformes $M \to \mathbb{R}^n$ dotadas de la topología compacta-abierta, señalando que una inmersión genérica de este tipo es caótica en muchos aspectos. Por ejemplo, mostramos que una inmersión mínima conforme genérica $u\colon M \to \mathbb{R}^n$ es no-propia, casi propia, y g-completa con respecto a cualquier métrica Riemanniana dada g en $\mathbb{R}^n$. Además, su imagen $u(M)$ es densa en $\mathbb{R}^n$ y disjunta de $\mathbb{Q}^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$, y tiene área infinita, curvatura total infinita, y curvatura ilimitada en cada conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. En el caso $n = 3$, también demostramos que una inmersión mínima conforme genérica $M \to \mathbb{R}^3$ tiene índice de estabilidad infinito en cada conjunto abierto en $\mathbb{R}^3$.

Referencias

[1] A. Alarcon, F. J. Lopez (2024). Generic properties of minimal surfaces, *preprint*, `arxiv.org/abs/2412.11563`.

Stable and isoperimetric regions for the free boundary problem in bounded annuli of revolution with increasing Gauss curvature

Antonio Cañete

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

antonioc@us.es

Resumen. In this work, we will study the stable and isoperimetric regions in symmetric bounded annuli of revolution with boundary and with increasing Gauss curvature from the shortest parallel, when considering the free boundary problem. In particular, we will show that isoperimetric solutions may be of several different types.

Agradecimientos. Trabajo parcialmente financiado por el proyecto PID2023-151060NB-I00, concedido por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades.

Normal homogeneous spaces with positive 2-intermediate Ricci curvature

Miguel Domínguez-Vázquez, Jason DeVito, David González-Álvaro and Alberto Rodríguez-Vázquez

Departamento de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela

miguel.dominguez@usc.es

Resumen. A normal metric on a compact homogeneous space G/H is a homogeneous metric on G/H induced by a bi-invariant metric on G. In 1961, M. Berger [1] gave a classification of the homogeneous spaces whose normal metrics are positively curved. In 1999, B. Wilking [3] found a missing example in Berger's classification. A generalization of positive sectional curvature is given by the notion of positive 2-intermediate Ricci curvature. This notion requires that the sum of the sectional curvatures of any pair of planes sharing a common vector is positive.
In this talk, I will report on an ongoing joint work [2] with Jason DeVito, David González-Álvaro and Alberto Rodríguez-Vázquez where we classify the compact homogeneous spaces admitting a normal metric with positive 2-intermediate Ricci curvature.

Referencias

[1] M. Berger (1961). Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)* **15**, 179–246.

[2] J. DeVito, M. Domínguez-Vázquez, D. González-Álvaro, A. Rodríguez-Vázquez (2025). Positive Ric_2 curvature on products of spheres and their quotients via intermediate fatness, *preprint*, `arxiv.org/abs/2410.18846`.

[3] B. Wilking (1999). The normal homogeneous space $(\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SO}(3))/\mathrm{U}^\bullet(2)$ has positive sectional curvature, *Proc. Amer. Math. Soc.* **127**, no. 4, 1191–1194.

El espacio de conexiones $\nabla^{\varepsilon,\rho}$

Villacampa Gutiérrez, Raquel; Otal Germán, Antonio; Ugarte Vilumbrales, Luis

Departamento de Matemáticas-IUMA. Universidad de Zaragoza

raquelvg@unizar.es

Resumen.
En [1] introdujimos la familia de conexiones lineales $\nabla^{\varepsilon,\rho}$ como una extensión natural de la familia 1-paramétrica de conexiones Hermíticas de Gauduchon y la utilizamos para dar soluciones explícitas al sistema de Strominger y a las ecuaciones del movimiento en tres espacios homogéneos no-Kähler particulares. En la actualidad estamos trabajando en extender los resultados anteriores a nuevas familias de espacios homogéneos.

Referencias

[1] A. Otal, L. Ugarte, R. Villacampa (2017). Invariant solutions to the Strominger system and the heterotic equations of motion. *Nuclear Phys. B*, 920, 442–474.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por el proyecto PID2023-148446NB-I00.

Rigidez y flexibilidad isométrica en espacios de Wasserstein.

Jaime Santos-Rodríguez, Mauricio Che, Fernando Galaz-García, Martin Kerin

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Madrid

jaime.santos@upm.es

Resumen. La teoría de transporte óptimo ha sido usada para modelar diversos fenómenos tanto dentro de las matemáticas como en otras ciencias. En esta charla nos centraremos en los aspectos más geométricos de la teoría, específicamente en las simetrías de un espacio de Wasserstein.
Dado un exponente $p \in [1, \infty)$ y un espacio métrico (X, d), el espacio L^p-Wasserstein sobre X consiste en el espacio de medidas de probabilidad con $p-$momento finito, $\mathbb{P}_p(X)$, dotado con una distancia inducida por las soluciones al problema de transporte de Kantorovich con coste $c(x, y) = d^p(x, y)$. Diremos que un espacio (X, d) es isométricamente rígido cuando el grupo de isometrías de $\mathbb{P}_p(X)$ es isomorfo al de X; en otro caso, diremos que es isométricamente flexible.
En general, determinar la rigidez/flexibilidad de un espacio (X, d) depende tanto de la geometría como del exponente p (véase por ejemplo [1, 3, 4]). En esta charla primero daremos una visión general de la geometría de los espacios de Wasserstein para luego hablar de distintas construcciones naturales en las que podremos observar tanto rigidez como flexibilidad isométrica [2].

Referencias

[1] J. Bertrand, B. R. Kloeckner (2016). A geometric study of Wasserstein spaces: isometric rigidity in negative curvature. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 5, pp. 1368—1386.

[2] M. Che, F, Galaz-García, M. Kerin, J. Santos-Rodríguez (2024). Isometric Rigidity of Metric Constructions with respect to Wasserstein Spaces, *preprint* `arXiv:2410.14648`.

[3] G. P. Gehér, T. Titkos, D. Virosztek (2022). The isometry group of Wasserstein spaces: the Hilbertian case. *J. Lond. Math. Soc.* (2) 106.4, pp. 3865-–3894.

[4] J. Santos-Rodríguez (2022). On isometries of compact Lp-Wasserstein spaces. *Adv. Math.* 409, part A, Paper No. 108632.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Mauricio Che, Fernando Galaz-García y Martin Kerin. Proyecto parcialmente financiado por los proyectos MTM 2017–85934–C3–2–P, PID 2021-124195NB-C32 del Ministerio de Economía y Competividad de España y un contrato Margarita Salas CA1/RSUE/2021-00625.

Capillary Surfaces and an Overdetermined Problem in the Sphere

Isabel Fernández, Alberto Cerezo, Pablo Mira

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

isafer@us.es

Resumen.
In this talk, we will review the theory of capillary minimal surfaces in the ball and its relation to the following overdetermined problem for the first eigenvalue of the Laplacian on the sphere:

$$\begin{cases} \Delta u + 2u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = a, \quad \partial_n u = b & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

Here, Ω is adomain in the 2-sphere, $a, b \in \mathbb{R}$ are constants, and ∂_n denotes the partial derivative in the direction of the exterior unit normal to Ω.

In 1985, Nitsche asked whether every embedded capillary minimal annulus in the ball must be rotational. We will answer this question in the negative. More specifically, we will construct a countable number of one-parameter families of such surfaces.

Using their Gauss map, we will show that these examples lead to (non-rotational) ring-type domains $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ for which the overdetermined problem (1) admits a positive solution. This disproves a conjecture by Souam in 2005.