

## Didáctica de las Matemáticas en la Universidad

### Equipo organizador

- Salvador Llinares (Universidad de Alicante)
- Núria Planas (Universitat Autònoma de Barcelona - SEIEM)
- Irene Ferrando (Universitat de València - Comisión Educación RSME)

### Descripción

Esta sesión tiene como propósito contribuir al diálogo entre la comunidad matemática y la investigación en didáctica de la matemática, mediante la presentación de estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario. A través de ejemplos de investigaciones se muestran algunas características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática en relación a las matemáticas en el nivel universitario.

Los focos de las investigaciones se centran en el papel de la modelación, el uso de recursos digitales, el papel de la demostración en las carreras científico-técnicas, el uso de modelos de aprendizaje para caracterizar el aprendizaje de los estudiantes universitarios (geometría y topología), y las características de la forma de justificar en las tareas matemáticas por parte de los estudiantes que acceden a las carreras científicas.

**Palabras clave:** Didáctica de las Matemáticas; Educación Superior; Modelización; Demostración

## Programa

MARTES, 20 de enero

- |               |  |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:30 | Verónica Martín-Molina (Universidad de Sevilla)<br><i>Breve panorámica de investigaciones centradas en la didáctica de las matemáticas a nivel universitario</i>                               |
| 11:30 – 12:00 | Inés María Gómez-Chacón y Adrián Bacelo (Universidad Complutense de Madrid)<br><i>Caracterizar el Pensamiento Computacional y Algorítmico en Educación Matemática universitaria</i>            |
| 12:00 – 12:30 | Francisco J. Boigues Planes (Universitat Politècnica de València)<br><i>La noción de Justificación en los exámenes de las PAU en matemáticas II</i>  |
| 15:30 – 16:00 | María Burgos (Universidad de Granada)<br><i>La demostración matemática: Potencialidad y desafíos en la formación de estudiantes de carreras científico-técnicas</i>                            |
| 16:00 – 16:30 | Víctor Manero (Universidad de Zaragoza)<br><i>Aprendizaje de la geometría y topología a nivel universitario a través del modelo de Van Hiele. Implicaciones para la docencia</i>               |
| 16:30 – 17:00 | Matías Camacho (Universidad de la Laguna)<br><i>Investigaciones sobre la formación matemática de los estudiantes universitarios. Nuevos retos que surgen de la emergencia de la tecnología</i> |

# Breve panorámica de investigaciones centradas en la didáctica de las matemáticas a nivel universitario

VERÓNICA MARTÍN-MOLINA

Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla

veronicamartin@us.es

**Resumen.** Los objetivos principales de la didáctica de las matemáticas incluyen tanto la investigación *pura*, orientada a comprender la naturaleza del pensamiento, el aprendizaje y la enseñanza matemáticos, como la investigación *aplicada*, centrada en mejorar la enseñanza de las matemáticas [3]. Este autor también señala que esta disciplina no ofrece respuestas definitivas a preguntas como “¿Qué funciona?”, ya que las respuestas dependen de lo que se valore y se quiera conseguir. A diferencia de la investigación en matemáticas, que puede tener siglos de antigüedad, la didáctica de las matemáticas es una disciplina relativamente nueva, con solo algunas décadas de existencia, y sus resultados raramente son concluyentes.

En esta comunicación, se pretende presentar una breve panorámica de investigaciones puras y aplicadas centradas en la didáctica de las matemáticas a nivel universitario. Se mostrarán principalmente estudios en los que los participantes son matemáticos o estudiantes del grado en matemáticas. Asimismo, se explorará cómo dichas investigaciones pueden ayudar a mejorar la enseñanza de las matemáticas en la universidad.

Finalmente, se reflexionará sobre el hecho de que, aunque existe un creciente número de estudios en este ámbito, aún queda mucho por investigar. Uno de los principales retos es cómo lograr que los resultados de estas investigaciones lleguen de manera efectiva al aula universitaria y cómo generar instancias de transferencia eficientes de la investigación a la docencia [1]. Para ello, la colaboración entre profesores universitarios de matemáticas e investigadores en didáctica de las matemáticas es fundamental [2].

## Referencias

- [1] M. Camacho-Machín, J. Perdomo-Díaz, R. Trujillo-González (2022). Matemáticas en la Universidad, en L. J. Blanco Nieto, N. Climent Rodríguez, M. T. González Astudillo, A. Moreno Verdejo, G. Sánchez-Matamoros García, C. de Castro Hernández, C. Jiménez Gestal, editores, *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática*, Universidad de Granada, 224–259.
- [2] E. Nardi (2008). *Amongst mathematicians: Teaching and learning mathematics at university level*. Springer.
- [3] A. H. Schoenfeld (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the AMS*, 47(6), 641–649.

**Agradecimientos.** Este trabajo se ha realizado en el contexto del Proyecto PID2022-139079NB-I00, financiado por MICIU/AEI/<https://doi.org/10.13039/501100011033> y por FEDER/UE.

## Caracterizar el Pensamiento Computacional y Algorítmico en Educación Matemática universitaria

INÉS M. GÓMEZ-CHACÓN, ADRIÁN BACELO

Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid

imgomezc@uclm.es

**Resumen.** La investigación que se describe tiene como finalidad identificar conexiones entre el pensamiento computacional y el pensamiento algorítmico en el aprendizaje de las matemáticas. El objetivo de esta investigación es caracterizar el pensamiento algorítmico en un contexto universitario del Grado en Matemáticas mediante tareas desconectadas. Se presenta un modelo de análisis a través de categorías que establecen conexiones entre espacios de trabajo matemático y algorítmico en tres dimensiones, semiótica, instrumental y discursiva. Los resultados confirman la interacción entre estas dimensiones y su valor predictivo para un mejor rendimiento en programación (Bacelo y Gómez-Chacón, 2023). Así mismo la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático permite trabajar perspectivas y vías sobre el análisis del razonamiento; y las actividades desconectadas se evidencian como una herramienta muy útil para analizar y categorizar el pensamiento algorítmico

### Referencias

- [1] A. Bacelo, I. M. Gómez-Chacón (2023). Characterising algorithmic thinking: a university study of unplugged activities. *Thinking skills and creativity*, 48, 101284.

**Agradecimientos.** Investigación subvencionada por PID2021-122752NB-I00 y PID2022138325OB-I00, Ministerio de Ciencia MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, EU.

## La noción de Justificación en los exámenes de las PAU en matemáticas II

FRANCISCO J. BOIGUES PLANES, VALENTÍN GREGORI GREGORI, ABILIO ORTS MUÑOZ

Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

fraboipl@mat.upv.es

**Resumen.** Las últimas legislaciones en el campo de la educación secundaria apuntan hacia una enseñanza de las matemáticas que fomente la competencia matemática. Un concepto que tiene muchas aristas y puntos de vista, pero de manera inequívoca, englobaría la capacidad de fomentar en los estudiantes la justificación de sus tareas matemáticas. No es suficiente que los estudiantes aprendan de manera automática una serie de problemas estándar. El profesorado debe impulsar que los estudiantes expliquen el por qué de sus realizaciones matemáticas. El trabajo que estamos realizando un grupo de profesores del departamento de matemática aplicada en la UPV, en colaboración con profesores de secundaria, desde hace varios años, a partir de las realizaciones en los exámenes de la PAU (cerca de 800 estudiantes) nos ha permitido llegar a determinadas conclusiones que podrían mejorar la enseñanza de las matemáticas: a) Uso no correcto del lenguaje matemático; b) Las dificultades de usar calculadoras de manera coherente con lo pedido en una tarea; c) La falta de definición cuando se introducen variables en la resolución de ejercicios ; d) No explicitar los pasos que han seguido para llegar a una conclusión cuando están resolviendo un problema. Si el profesor trabaja esta competencia: “la justificación”, seguro que ayudaremos a que nuestros alumnos aprendan mejor las matemáticas.

## La demostración matemática: Potencialidad y desafíos en la formación de estudiantes de carreras científico-técnicas

MARÍA BURGOS, BETTINA MILANESIO

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

mariaburgos@ugr.es

**Resumen.** La demostración matemática desempeña un papel central en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, no solo por su presencia transversal y longitudinal en la disciplina, sino también por su contribución en el desarrollo de la comprensión profunda y dominio de las matemáticas. Sin embargo, cómo enseñarla y cómo se produce su aprendizaje continúa siendo un reto tanto para los investigadores como para los propios profesores. Esto motiva el interés por analizar cómo progresan los estudiantes en la elaboración de demostraciones cuando reciben formación específica. Con este interés, en esta comunicación describimos los resultados de dos intervenciones formativas realizadas con estudiantes de primer curso universitario cuando resuelven situaciones que involucran la conjetura y la demostración de propiedades matemáticas. Una de ellas se llevó a cabo con estudiantes argentinos de los grados en Física y Matemáticas en el contexto de la aritmética entera; la otra, con estudiantes españoles del grado en Estadística, en el marco de una asignatura de álgebra básica. En ambos casos, las intervenciones se desarrollaron de manera colaborativa entre las investigadoras y los profesores responsables de las asignaturas, atendiendo tanto a los objetivos de la investigación como a las orientaciones planteadas por los docentes. Para llevar a cabo los análisis de las prácticas demostrativas desarrolladas por los estudiantes, adoptamos un enfoque metodológico cualitativo, en el que articulamos el modelo de Toulmin – o la ampliación de este modelo propuesta por Knipping y Reid, si la complejidad de la estructura argumentativa lo requiere – con herramientas del Enfoque ontosemiótico. En concreto, analizamos el grado de pertinencia en sus respuestas, los objetos y procesos implicados en las demostraciones que desarrollan y los niveles de formalización logrados. Esta articulación nos permite alcanzar una visión más profunda de las competencias de los estudiantes con la demostración y las dificultades que encuentran con este proceso. De manera general, los resultados de ambas intervenciones formativas muestran diversos tipos de dificultades al inicio de su formación universitaria. Estas dificultades están vinculadas principalmente al uso de estrategias argumentativas informales, que no permiten validar las conjeturas emergentes o proposiciones matemáticas implicadas, así como un uso inadecuado de las propiedades matemáticas disponibles o reglas lógicas en la construcción de demostraciones. Tras una formación en la que la demostración se convierte en parte esencial de la práctica docente, la mayoría de los estudiantes logró avanzar en la comprensión y el desarrollo de demostraciones con un mayor nivel de formalización. Se concluyen aspectos claves de ambas intervenciones formativas que contribuyeron a estos logros, destacando la importancia de seguir explorando posibles intervenciones que integren las recomendaciones derivadas de la investigación, con el fin de promover oportunidades de aprendizaje significativo con la demostración.

# Aprendizaje de la geometría y topología a nivel universitario a través del modelo de Van Hiele. Implicaciones para la docencia

VÍCTOR MANERO, ALBERTO ARNAL-BAILERA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

vmanero@unizar.es

**Resumen.** El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (Van Hiele, 1986) establece cinco niveles de desarrollo, desde el nivel 1 (visual) hasta el nivel 5 (rigurosidad). A pesar de que este modelo ha sido ampliamente estudiado, existen pocas investigaciones que aborden el quinto nivel. En esta comunicación mostramos una trayectoria investigadora en curso que tiene varios objetivos: estudiar en profundidad los procesos de aprendizaje en Geometría y Topología a nivel universitario, analizar el desarrollo de dichos procesos entre los estudiantes de Grado y obtener implicaciones para la docencia universitaria.

El primer paso ha sido describir este nivel mediante la construcción y validación de una lista de indicadores para cada uno de los procesos involucrados en el razonamiento geométrico (definición, demostración, clasificación e identificación) mediante la metodología Delphi (Linstone y Turoff, 1975). El producto final es una lista de indicadores validados del quinto nivel de razonamiento de Van Hiele para cada proceso. En particular, los procesos de demostración y definición resultaron ser los más relevantes en este nivel (Arnal-Bailera y Manero, 2024). Algunos de los indicadores daban cuenta de la importancia de elegir de forma consciente entre varias definiciones equivalentes en función del trabajo a desarrollar o de ser capaz de estructurar una demostración en partes más pequeñas, como lemas, que podrían ser de utilidad en otros momentos. A partir de la lista de indicadores, se diseñó un cuestionario para medir el grado de adquisición del quinto nivel del modelo de Van Hiele en el proceso de definición (Arnal-Bailera y Manero, en prensa) siguiéndose también una metodología Delphi. A lo largo de este recorrido para desarrollar nuestro conocimiento del nivel 5 de Van Hiele han ido apareciendo algunas ideas que permitirían hacerlo operativo y facilitar el diseño de actividades de enseñanza. Entre otras cuestiones, durante la elaboración de los ítems, se recalca la importancia de realizar tareas de análisis comparativo entre diferentes contextos o sistemas axiomáticos

## Referencias

- [1] A. Arnal-Bailera, V. Manero (2024). A characterization of Van Hiele's level 5 of geometric reasoning using the delphi methodology. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22(3), 537–560.
- [2] A. Arnal-Bailera, V. Manero (2025). Design and Validation of a Questionnaire to Assess the Definition Process at Van Hiele Level 5. In press.
- [3] H. A. Linstone, M. Turoff (1975). *The Delphi method: Techniques and applications*. Addison-Wesley.
- [4] P. M. Van Hiele (1986). *Structure and insight*. Academic Press.

**Agradecimientos.** Este trabajo se ha realizado en el contexto del grupo S60 - 23R, con fondos del Gobierno de Aragón financiado por la Comunidad Europea.

# Investigaciones sobre la formación matemática de los estudiantes universitarios. Nuevos retos que surgen de la emergencia de la tecnología

MATÍAS CAMACHO-MACHÍN, RODRIGO TRUJILLO

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna

mcamacho@ull.es

**Resumen.** La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) ha puesto el foco en el aprendizaje las matemáticas en el ámbito universitario desde hace bastantes años. En el simposio de la SEIEM de 2021, se desarrolló el Seminario de Investigación “La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la Universidad”.

En una de las ponencias, se presentó una agenda de investigación que recogía diferentes aspectos a tener en cuenta en la investigación para mejorar la formación matemática en la educación superior (Camacho-Machín, 2021). El informe incide en la importancia de potenciar los estudios centrados en la enseñanza y aprendizaje en las ingenierías y otras ciencias que requieran una formación matemática diferente a la de los matemáticos. Concretamente, considera necesario dar un impulso a la investigación en modelización matemática analizada desde perspectivas no epistemológicas, así como estudiar el campo afectivo, incluyendo las creencias y concepciones de estudiantes y docentes sobre las matemáticas y su la enseñanza. También destaca la importancia del uso de tecnologías digitales. Se destaca la importancia de la demostración y la prueba, aspectos cada vez más relegados en los cursos de matemáticas en Ingenierías y Ciencias. Casi cinco años después, los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas siguen siendo clave para los resultados académicos, la satisfacción de los distintos actores (profesorado, alumnado, administración, familias) y los indicadores de calidad del sistema educativo (PISA, rankings, etc.).

En esta ponencia se reflexionará sobre los resultados de la investigación en Didáctica de la Matemática a nivel universitario de los últimos 30 años. Se presentarán algunas de las dificultades que emergen en la transición desde el Bachillerato a la Universidad (afrontando tasas de abandono del 33%), que se relacionan principalmente con: la brecha entre la formación y competencias con las que llega el alumnado de Bachillerato y la poca/nula adaptación de los grados a ese punto de partida, adaptación de contenido, las metodologías empleadas en los cursos pre-universitarios. Se estudiará la necesidad de abordar el impacto que las tecnologías digitales, en particular la Inteligencia Artificial generativa y los Sistemas de Geometría Dinámica, podrían tener en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La modelización matemática y la resolución de problemas matemáticos constituyen los ejes en los que fundamentamos la discusión, se mostrarán ejemplos de actividades para la enseñanza de conceptos matemáticos propios del ámbito universitario adaptados de investigaciones en las que han participado los autores.

## Referencias

- [1] M. Camacho-Machín (2021). Agenda de Investigación para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en el Nivel Universitario. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV*, SEIEM, 33–48.