

Geometría Algebraica y Singularidades

Equipo organizador

- Clementa Alonso González (Universidad de Alicante)
- Carlos Galindo Pastor (Universitat Jaume I)
- Julio José Moyano Fernández (Universitat Jaume I)
- Juan José Nuño Ballesteros (Universitat de València)

Descripción Esta sesión está promovida por la Red de Geometría Algebraica y Singularidades (RGAS). La RGAS está reconocida por el MICIU desde el año 2016, está financiada actualmente (RED2024-153610-T) y está formada por más de 120 investigadores integrados en 19 proyectos de investigación financiados por el MICIU y organizados en 14 nodos.

Anualmente celebra al menos una reunión científica que sirve también como reunión anual de seguimiento de la Red. Como ya se ha hecho con anterioridad, los años en los que se celebra el Congreso bianual de la RSME se intenta que dicha reunión se enmarque dentro de la misma con un triple objetivo: - Presentar los recientes avances en el ámbito de la Geometría Algebraica y las Singularidades - Apoyar las actividades de la RSME en cuanto a difusión y visibilidad científica de las matemáticas en España. - Hacer visible la Red y su investigación en el contexto nacional La información completa de la Red se puede consultar en su página web: <https://blogs.mat.ucm.es/rgas/>

Palabras clave: Geometría Algebraica; Singularidades

Programa

LUNES, 19 de enero

- 15:30 – 16:00 Evelia R. García Barroso (Universidad de La Laguna)
On the topology of the generic polar curve of a branch
- 16:00 – 16:30 Ana Belén de Felipe (Universitat Politècnica de Catalunya)
Polars in arbitrary characteristic
- 16:30 – 17:00 Cinzia Villa (Universitat de València)
Resolución de inestabilidades
- 17:00 – 17:30 Patricio Almirón Cuadros (Universidad de Valladolid)
Familias de curvas planas equisingulares con número de Tjurina constante

MARTES, 20 de enero

- 11:00 – 11:30 Abraham del Valle Rodríguez (Universidad de Sevilla)
Euler-homogeneidad fuerte y Saito-holonomicidad en hipersuperficies complejas
- 11:30 – 12:00 Ángel Luis Muñoz Castañeda (Universidad de León)
On the universal moduli stack of line bundles. Geometry and applications
- 12:00 – 12:30 Ana Peón Nieto (Universidad de Santiago de Compostela)
Paisajes bamboleantes: fibrados wobbly y su geometría
- 15:30 – 16:00 José Ignacio Cogolludo-Agustín (Universidad de Zaragoza)
The Geometric Morphism Problem
- 16:00 – 16:30 Carlos-Jesús Moreno-Ávila (Universidad de Extremadura)
Valuative Seshadri constants and Newton–Okounkov bodies in relation to the Nagata conjecture
- 16:30 – 17:00 Yue Yu (Universitat Autònoma de Barcelona)
The number of vertices of Newton–Okounkov polygons and Picard number
- 17:00 – 17:30 Mario Morán Cañón (Universidad Autónoma de Madrid)
General components of the jet schemes
- 18:00 – 18:30 Guillermo Sánchez Arellano (Universidad Complutense de Madrid)
H-principios locales para relaciones en derivadas parciales holomorfas
- 18:30 – 19:00 Alba Larraya Sancho (BCAM - Basque Center for Applied Mathematics)
Ataques CCA sobre esquemas basados en lattices

Familias de curvas planas equisingulares con número de Tjurina constante.

PATRICIO ALMIRÓN CUADROS

Departamento de Álgebra, Análisis, Geometría y Topología , Universidad de Valladolid

palmiron@uva.es

Resumen. El número de Tjurina de una curva plana es uno de los invariantes analíticos más importantes de una curva plana. En general, dado un tipo topológico es difícil determinar qué condiciones topológicas determinan si el número de Tjurina es constante en esa clase. Aparte de ejemplos obvios donde solamente existe una única clase analítica pocas familias de curvas planas se conocen que tengan número de Tjurina constante fijado su tipo topológico. De hecho, hasta ahora solamente eran conocidos dos familias concretas de curvas irreducibles. En esta charla presentaré un trabajo conjunto con Marcelo E. Hernandes en el que proporcionamos una familia de curvas planas reducidas con dos ramas que tienen un número de Tjurina constante en su clase de equisingularidad, junto con una fórmula cerrada para dicho número en términos de datos topológicos. Esta constituye la primera familia de curvas planas no irreducibles con más de una clase analítica y número de Tjurina constante.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Marcelo E. Hernandes. Está parcialmente financiado por los proyectos RYC2021-034300-I por MI-CIU/AEI/10.13039/501100011033, y por European Union NextGenerationEU/PRTR. Durante la elaboración del trabajo también se ha recibido financiación del programa IMAG–Maria de Maeztu grant CEX2020-001105-M / AEI /10.13039/501100011033 y del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades PID2020-114750GB-C32/AEI/10.13039/501100011033.

The Geometric Morphism Problem

JOSÉ IGNACIO COGOLLUDO-AGUSTÍN, EVA ELDUQUE

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

jicogo@unizar.es

Resumen. The purpose of this talk is to connect and unify two types of results regarding the structure of quasi-projective groups, that is, fundamental groups of quasi-projective manifolds. Consider the following well-known problem, which we will refer to as the Geometric Morphism Problem.

[Geometric Morphism Problem] Let U be a quasi-projective manifold and $\psi : \pi_1(U) \rightarrow G$ be an epimorphism to a smooth complex curve group G with finitely generated kernel. Determine when/if there exists a morphism $F : U \rightarrow C$ to a smooth complex curve C realizing ψ , that is, such that $\psi = F_* : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(C) = G$, up to isomorphism in $\pi_1(C)$.

We will state an extension of this problem using orbifold structures. In particular, denote by $\mathbb{G}_{g,(r,\bar{m})}$ the orbifold fundamental group of a Riemann surface of genus g with r points removed and s orbifold points with orders $\bar{m} = (m_1, \dots, m_s)$. One can state the following analogue of the Geometric Morphism Problem.

[Geometric Orbifold Morphism Problem] Let U be a quasi-projective manifold and $\psi : \pi_1(U) \rightarrow \mathbb{G}_{g,(r,\bar{m})}$ be an epimorphism with finitely generated kernel. Determine when/if there exists an orbifold morphism $F : U \rightarrow C_\varphi$ to a smooth complex curve C with orbifold structure C_φ realizing ψ , that is, such that $\psi = F_* : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(C_\varphi) = \mathbb{G}_{g,(r,\bar{m})}$, up to isomorphism in $\pi_1^{\text{orb}}(C_\varphi)$.

We will discuss an answer to the Geometric Orbifold Morphism Problem in terms of the following invariant of the group $\chi_{g,(r,\bar{m})} := 2 - 2g - r - \sum_{i=1}^s 1 - \frac{1}{m_i}$.

Theorem: The Geometric Orbifold Morphism Problem has a positive answer for $\mathbb{G}_{g,(r,\bar{m})}$ if $\chi_{g,(r,\bar{m})} < 0$. Moreover, the multiple fibers of F are determined by $\bar{m}$ and one such F is uniquely determined up to isomorphism of algebraic varieties in the target.

Agradecimientos. The authors are partially supported by PID2020-114750GB-C31, funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033. The first author is also partially funded by the Departamento de Ciencia, Universidad y Sociedad del Conocimiento of the Gobierno de Aragón (Grupo de referencia E22_20R “Álgebra y Geometría”). The second author is partially supported by the Ramón y Cajal Grant RYC2021-031526-I funded by MCIN/AEI /10.13039/501100011033 and by the European Union NextGenerationEU/PRTR

Polars in arbitrary characteristic

ANA BELÉN DE FELIPE

Departamento de Matemáticas, Universitat Politècnica de Catalunya

ana.belen.de.felipe@upc.edu

Resumen. We present a decomposition in the spirit of Eggers of the polar of a power series in two variables with coefficients in an algebraically closed field of arbitrary characteristic.

Agradecimientos. This is joint work with Evelia R. García Barroso and Janusz Gwoździewicz.

Euler-homogeneidad fuerte y Saito-holonomicidad en hipersuperficies complejas

ABRAHAM DEL VALLE RODRÍGUEZ

Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla

adelvalle2@us.es

Resumen. En esta charla introduciremos y motivaremos dos propiedades interesantes en el estudio de las singularidades de hipersuperficies complejas: la Euler-homogeneidad fuerte y la Saito-holonomicidad. Para la primera de ellas, daremos condiciones necesarias y suficientes en términos de unos ciertos ideales de Fitting. Para la segunda, introduciremos nuevas versiones de la definición que generalizarán otras propiedades anteriormente definidas sólo para un tipo particular de hipersuperficies: los divisores libres. Estas nociones también serán caracterizadas en términos de los mismos ideales, lo que nos permitirá relacionarlas con la Euler-homogeneidad y extender algunos resultados que sólo se conocían en el caso libre. Finalmente, contaremos cómo estos criterios nos han permitido avanzar en el estudio de una conjetura planteada en 2002, permitiendo demostrar su veracidad en nuevos casos.

Agradecimientos. Trabajo parcialmente financiado por la beca predoctoral PAIDI 2021 de la Junta de Andalucía (núm. PREDOC_00485) y por el proyecto de investigación PID2020-114613GB-I00.

On the Topology of the Generic Polar Curve of a Branch

EVELIA R. GARCÍA BARROSO

Departamento de Matemáticas, Estadística e I.O. & IMAULL, Universidad de La Laguna

ergarcia@ull.es

Resumen. We study, for complex plane branches of genus one, the topological type of their generic polar curve, in terms of the semigroup and the Zariski invariant of the branch. We improve some results given by Casas-Alvero in 2023, since we refine the topological type fixed for the branch by filtering through the possible values of the Zariski invariants.

Agradecimientos. This work is in collaboration with Marcelo E. Hernandes (Universidade de Maringá, Brazil) and M. Fernando Hernández Iglesias (PUCP and UNMSM, Lima, Peru).

Ataques CCA sobre esquemas basados en lattices

ALBA LARRAYA SANCHO

BCAM - Basque Center for Applied Mathematics

alarraya@bcamath.org

Resumen. En la charla empezaremos con el problema Learning With Errors, introducido por Oded Regev. Este problema es la base de la seguridad en una parte de los sistemas criptográficos post-cuánticos que se están desarrollando para afrontar la amenaza de la computación cuántica. A continuación presentaremos dos esquemas criptográficos: los esquemas completamente homomórficos y CRYSTALS-Kyber. Explicaremos los ataques CCA sobre los sistemas homomórficos y las distintas capas de seguridad de Kyber y algunos ataques a los que es vulnerable cuando no está bien implementado.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Miguel Ángel Marco Buzunáriz y Alba Hernández Costoya. Proyecto parcialmente financiado por E22_{23R} y PID2020-114750GB-C31.

General components of the jet schemes

MARIO MORÁN CAÑÓN

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid e ICMAT

mario.moran@uam.es

Resumen. We will explain how the topological structure of the jet schemes of an algebraic variety encodes relevant information about the singularities of the variety and the scheme structure of its arc scheme. In this sense, we will present a strong connection between a family of irreducible components of the jet schemes, called the general components, the nilpotent functions of the arc scheme, and blow-ups of the base variety at certain centers.

Agradecimientos. This is part of a joint project with Julien Sebag. It is partially supported by grant PID2022-138916NB-I00, funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by ERDF A way of making Europe.

Valuative Seshadri constants and Newton–Okounkov bodies in relation to the Nagata conjecture

CARLOS-JESÚS MORENO-ÁVILA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura

cjmoravi@unex.es

Resumen. The Nagata conjecture arises as a result of the negative answer to the 14th Hilbert problem [5]. Despite many efforts this conjecture remains open after more than 60 years. There exist several reformulations using interesting objects in Algebraic Geometry as Seshadri constants, Mori cone and irrational nef divisors. Recently, a valuative Nagata conjecture has been stated in [2, 4]. This conjecture involves a (real) plane valuation ν of the projective plane and a constant named Seshadri-type constant, denoted $\hat{\mu}(\nu)$ and introduced in [1]. In addition, the valuative Nagata conjecture implies the Nagata conjecture and asymptotic evidences of its trueness in some particular cases have been proved in [4]. In this talk we introduce a natural Seshadri constant for a smooth projective surface S , a nef divisor on S and a divisorial plane valuation of S and we show some of their properties. These results will help us to give several equivalent geometrical statements to the valuative Nagata conjecture for divisorial plane valuations.

Referencias

- [1] S. Boucksom, A. Küronya, C. Maclean, T. Szemberg, Vanishing sequences and Okounkov bodies, *Math. Ann.*, **361** (2015), 811–834.
- [2] M. Dumnicki, B. Harbourne, A. Küronya, J. Roé, T. Szemberg, Very general monomial valuations of $\mathbb{P}^2$ and a Nagata type conjecture, *Comm. Anal. Geom.*, **25** (2017) 125–161.
- [3] C. Galindo, F. Monserrat, C.-J. Moreno-Ávila, J.-J. Moyano-Fernández, On the valuative Nagata conjecture, *Res. Math. Sci.* **12**, 18 (2025). <https://doi.org/10.1007/s40687-025-00500-2>
- [4] C. Galindo, F. Monserrat, J. J. Moyano-Fernández, Minimal plane valuations, *J. Alg. Geom.*, **27** (2018), 751–783.
- [5] M. Nagata. On the 14-th problem of Hilbert. *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 766–772.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Carlos Galindo, Francisco Monserrat y Julio José Moyano Fernández. Proyecto parcialmente financiado por el proyecto de investigación PID2022-138906NB-C22 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033, así como por la Universitat Jaume I, proyectos GACUJIMA/2024/03 y UJI-B2021-02.

On the universal moduli stack of line bundles with level structures. Geometry and applications

ÁNGEL LUIS MUÑOZ CASTAÑEDA,

Departamento de Matemáticas, Universidad de León

amunc@unileon.es

Resumen. The study of the moduli space of line bundles with level structures over smooth projective curves has its origins in a work of Raynaud [6], who introduced it as an auxiliary object to investigate the deformation theory of the Jacobian. Since then, its study has become central to many diverse areas. In this talk, the main object of interest will be the universal moduli stack $L_{d,g,n}$ of line bundles with level structures of degree d over $M_{g,n}$. We will examine some geometric and structural properties, focusing in particular on the existence of a canonical immersion into $Gr(k, n) \times M_{g,n}$, for some k depending on the degree. The results we will present have meaningful applications and consequences. For instance, in the case $g = 0$, the described immersion gives rise to a family of embeddings of $M_{0,n}$ into the Grassmannian $Gr(k, n)$, parametrized by the algebraic group $\mathbb{G}_m^{n-1}$, which is of interest in invariant theory. On the other hand, the results can also be interpreted in the context of code-based cryptography, providing theoretical support for the widely assumed hypothesis that geometric Goppa codes are distinguishable from arbitrary linear codes.

Referencias

- [1] B. Howard, J. Millson, A. Snowden and R. Vakil (2009). The equations for the moduli space of points on the line. *Duke Mathematical Journal*, 146(2):175–226.
- [2] I. Márquez-Corbella, E. Martínez-Moro, and R. Pellikaan (2014). On the unique representation of very strong algebraic geometry codes. *Designs, Codes, and Cryptography*, 70(1-2):215–230.
- [3] R. J. McEliece (1978). A public-key cryptosystem based on algebraic coding theory. DSN Progress Report https://tmo.jpl.nasa.gov/progress_report/42-44/44N.PDF.
- [4] D. Mumford (1969) *Varieties defined by quadratic equations*. Springer Berlin Heidelberg.
- [5] A. L. Muñoz Castañeda (2025). Universal moduli of level structures, Goppa morphism and cryptography, *Submitted*, 36 pp.
- [6] M. Raynaud (1970). Spécialisation du foncteur de Picard. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 38:27–76.

Agradecimientos. The author wishes to thank Prof. F. J. Plaza Martín for his helpful comments and suggestions. This work was initiated under the research project TED2021-131158A-I00, funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by the European Union “NextGenerationEU”/PRTR. Subsequent improvements and extensions have been supported by the project PID2023-150787NB-I00, funded by MICIU /AEI /10.13039/501100011033 /FEDER, UE.

Paisajes bamboleantes: fibrados wobbly y su geometría

ANA PEÓN-NIETO

Departamento de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela

ana.peon@usc.es

Resumen. La historia de los fibrados wobbly se remonta a los años 80, cuando Drinfeld, motivado por el programam de Langlands geométrico, definió los fibrados muy estables. El término wobbly (bamboleante), acuñado después por Donagi-Pantev, se refiere a fibrados que no son muy estables. Esos autores desarrollaron un programa para probar Langlands geométrico mediante fibrados de Higgs. El trabajo de Hausel-Hitchin, generalizando estos conceptos a fibrados de Hodge, ha permitido entender nuevos aspectos de la geometría del espacio de móduli de fibrados de Higgs, desde invariantes geométricos hasta simetría espejo, empleando fibrados de Hodge muy estables. En esta charla, me centraré en los fibrados wobbly, para quienes las técnicas actuales fallan, presentando algunos resultados de clasificación, así como sobre su papel en el programa de Donagi-Pantev.

Referencias

- [1] R. Donagi and T. Pantev, *Geometric Langlands and non-abelian Hodge theory*, Surveys in differential geometry, Vol. XIII. Geometry, analysis, and algebraic geometry: forty years of the Journal of Differential Geometry, 85–116, International Press, Somerville, MA, 2009.
- [2] T. Hausel and N. Hitchin, *Very stable Higgs bundles, virtual equivariant multiplicity and mirror symmetry*, Invent. math. 228, 893–989 (2022). <https://doi.org/10.1007/s00222-021-01093-7>
- [3] G. Laumon, *Un analogue global du cône nilpotent*, Duke Math. Jour. 57 (1988), 647–671.
- [4] C. Pauly and A. Peón-Nieto, *Very stable bundles and properness of the Hitchin map*, Geom Dedicata 198, 143–148 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10711-018-0333-6>
- [5] A. Peón-Nieto, *Wobbly moduli of chains, equivariant multiplicities and $U(n_0, n_1)$ -Higgs bundles*, Preprint, arXiv:2303.08563 [math.AG].
- [6] A. Peón-Nieto, *Equality of the Wobbly and Shaky Loci*, International Mathematics Research Notices, Volume 2024, Issue 8, April 2024, Pages 6710–6730, <https://doi.org/10.1093/imrn/rnad254>

H-principios locales para relaciones en derivadas parciales holomorfas

GUILLERMO SÁNCHEZ ARELLANO, LUIS GIRALDO

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad Complutense de Madrid

guillermo_sanchez@ucm.es

Resumen. The goal of the h-principle theory is to understand when a geometric problem is governed by the laws of differential topology. When topology (more flexible) overrides geometry (more rigid), we say that the h-principle holds in that context.

The identity principle and the resulting lack of partitions of unity endow complex geometry with great rigidity. However, there is a class of complex manifolds—Stein manifolds—in which the Oka principle, a type of h-principle for holomorphic functions, holds. The flexible properties of Stein manifolds have been exploited by F. Forstnerič and M. Slapar to establish h-principles for holomorphic immersions and submersions, and by F. Forstnerič for complex contact forms. In this talk, we will explore how these techniques can be abstracted to obtain more general h-principles in this type of complex manifolds.

Referencias

- [1] F. Forstnerič, M. Slapar (2007). Stein structures and holomorphic mappings. *Mathematische Zeitschrift*, 256.3, 615–646.
- [2] F. Forstnerič (2020). h-principle for complex contact structures on Stein manifolds. *The Journal of Symplectic Geometry*, 18.3, 733–767.
- [3] L. Giraldo, G. Sánchez-Arellano (2025). Local HH -principles for holomorphic partial differential relations. *Mathematische Nachrichten*, 298.5, 1521–1548.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Luis Giraldo Suárez. Proyecto parcialmente financiado por PID2021-126124NB-I00, PID 2019-108936GB-C21 y PR27/21-029.

Resolución de inestabilidades

CINZIA VILLA

Departament de Matemàtiques, Universitat de València

cinvi@alumni.uv.es

Resumen. Estudiamos la resolución de inestabilidades de un multigermen $f : (X, S) \rightarrow (Y, 0)$, considerando por un lado los resultados de Belotto Da Silva, Bierstone y Milman, y por otro lado teniendo en cuenta el trabajo de Duco van Straten. En particular, estamos interesados en definir una *buena* resolución de inestabilidades que nos devuelva información topológica a través del grafo de resolución.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Juan J. Nuño-Ballesteros y Guillermo Peñafort Sanchis. Parcialmente financiado por el Proyecto PID2021-124577NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por “FEDER Una forma de hacer Europa.”

The number of vertices of Newton–Okounkov polygons and Picard number.

YUE YU

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona

Yue.Yu4@autonoma.cat

Resumen. Newton-Okounkov bodies serve as a bridge between algebraic geometry and convex geometry, enabling the application of combinatorial and geometric methods to the study of linear systems on algebraic varieties. As an application, let S be an algebraic surface and let $mv(S)$ denote the maximum number of vertices of the Newton-Okounkov bodies of S . We will show how $mv(S)$ can estimate the Picard number to a certain extent, particularly in the case of K3 surfaces.