



Congreso Bienal de la
**Real Sociedad
Matemática Española**
Del 19 al 23 de enero 2026

CONGRESO BIENAL DE LA REAL
SOCIEDAD MATEMÁTICA
ESPAÑOLA 2026

LIBRO DE RESÚMENES

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante
03690 Sant Vicent del Raspeig
Teléfono: 965 90 3400

© los autores, 2026
© de esta edición: Universitat d'Alacant

ISBN: 978-84-1302-347-2

Editores:
Cristian Castillo Godoy
Julio Mulero González
Juan Matías Sepulcre Martínez



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Índice general

I	Introducción	1
II	Conferencias plenarias	8
1	Algoritmos de desglose para problemas de optimización y factibilidad	9
2	On Hilbert's 19th problem on regularity for elliptic equations and recent extensions .	10
3	A categorical viewpoint on classical Quillen's stratification theorem for group cohomology	11
4	Teoría distribucional límite para el transporte óptimo	12
5	Esferas con curvaturas predeterminadas	13
6	Patterns and equilibria in incompressible fluids	14
7	Caracteres Correspondientes en Grupos Finitos	15
8	Reduced order methods for parametric time-dependent partial differential equations	16
9	Endpoint estimates for the fractal circular maximal function and related local smoothing	17
III	Sesiones especiales	18
1	Advances in Linear Algebra, Matrix Analysis and their Applications	19
2	Álgebra Computacional y Aplicaciones	34
3	Álgebras no Asociativas	49
4	Análisis Complejo y Teoría de Operadores	64
5	Análisis funcional, análisis armónico y métodos variacionales: nuevas direcciones..	79
6	Análisis Geométrico	95
7	Didáctica de las Matemáticas en la Universidad	110
8	Dinámica Topológica	118
9	Divulgación de las matemáticas	128
10	EDPs: problemas no lineales y aplicaciones	137
11	Estructuras superiores en Álgebra, Geometría y Topología	150
12	Evolution PDEs in applied sciences	162
13	Fluid Dynamics and PDEs	176

14	Geometría Algebraica Aplicada y Computacional	191
15	Geometría Algebraica y Singularidades	206
16	Geometría Convexa	221
17	Geometría Diferencial y Aplicaciones	236
18	Groups, Rings and Representations.....	248
19	Loci of Riemann and Klein Surfaces and Related Topics.....	263
20	Matemática Discreta y Algorítmica (MDA).....	279
21	Matemáticas aplicadas a las geociencias, los sistemas dinámicos y la ciencia de datos.....	293
22	Matemáticas en la Sociedad de la Información: Criptografía.....	306
23	Matemáticas en la Sociedad de la Información: Teoría de Códigos	320
24	Mathematics and Machine Learning.....	332
25	Modelos de decisión estratégica: fundamentos y aplicaciones	343
26	Optimización continua.....	353
27	Partial Differential Equations, Inverse Problems and Machine Learning	365
28	Point configurations: energy minimization, discrepancy, and related topics.....	378
29	Polinomios Ortogonales y Funciones Especiales: Teoría y Aplicaciones	391
30	Red Española de Topología.....	406
31	Resolución numérica de problemas de propagación de ondas	417
32	Teoría de nudos	427
33	Teoría de números	441
IV	Charlas contribuidas	456
V	Pósteres	498
VI	Otras actividades	523

1

Introducción



Presentación

El Congreso Bienal de la Real Sociedad Matemática Española 2026 reúne a la comunidad matemática en el campus de la Universidad de Alicante entre los días 19 y 23 de enero. La UA se convierte así en la primera institución de la Comunidad Valenciana en acoger este importante evento.

Este congreso supone una oportunidad para dar a conocer los últimos avances en investigación en diferentes áreas de matemáticas y facilita el establecimiento de lazos de colaboración entre distintos grupos de investigación de nuestro país. Además de las habituales conferencias plenarias, el programa incluye sesiones especiales y una exposición de pósteres.

La asistencia al congreso permite, además, disfrutar de varias actividades programadas tanto en el propio campus universitario como en la ciudad de Alicante y sus alrededores.

El logo del congreso mantiene una estética coherente con los de ediciones anteriores, conservando un formato similar en el texto, con las iniciales RSME 2026 destacadas y la mención de la sede. Su diseño se inspira en uno de los elementos más emblemáticos de la provincia, el castillo de Alicante, e incorpora también las características palmeras, especialmente abundantes en Elche.

Además, contiene varios guiños matemáticos, algunos más evidentes que otros. ¿Eres capaz de encontrar el número e ?



Comité de Honor

Diana Morant Ripoll	<i>Excma. Sra. Ministra de Ciencia, Innovación y Universidades</i>
Juan Francisco Pérez Llorca	<i>Molt Honorable Sr. President de la Generalitat Valenciana</i>
Antonio Pérez Pérez	<i>Sr. Presidente de la Excma. Diputación Provincial de Alicante</i>
Amparo Navarro Faure	<i>Excma. Sra. Rectora Magnífica de la Universidad de Alicante</i>
María Victoria Otero Espinar	<i>Sra. Presidenta de la Real Sociedad Matemática Española</i>

Comité Científico

Presidenta	Ana María Vargas Rey <i>Universidad Autónoma de Madrid</i>
Vocales	Clementa Alonso González <i>Universidad de Alicante</i>
	Manuel J. Castro Díaz <i>Universidad de Málaga</i>
	Elisenda Feliu <i>University of Copenhagen</i>
	Xavier Fernández-Real <i>EPFL École polytechnique fédérale de Lausanne</i>
	Fernando Lledó Macau <i>Universidad Carlos III de Madrid</i>
	David Pérez García <i>Universidad Complutense de Madrid</i>
	María Pe Pereira <i>Universidad Complutense de Madrid</i>
	Joaquín Pérez Muñoz <i>Universidad de Granada</i>
	Daniel Sanz-Alonso <i>University of Chicago</i>

Comité Organizador

Presidente	Juan Matías Sepulcre Martínez
Vocales	Alma Luisa Albuja Brotons
	Clementa Alonso González
	Ángel Arroyo García
	Miguel Beltrá Vidal
	Àngela Buforn Lloret
	Cristian Castillo Godoy
	Ceneida Fernández Verdú
	Fernando García Castaño
	David García García
	Mariola Molina Vila
	Julio Mulero González
	Verónica Requena Arévalo
	Ángel San Antolín Gil
	Lorena Segura Abad
	Xaro Soler Escrivà

Programa resumido

	Lunes 19	Martes 20	Miércoles 21	Jueves 22	Viernes 23	
8:30 – 9:00	Registro	Registro	Registro	Registro	Registro	
9:00 – 9:45		Charla Plenaria Xavier Cabré	Charla Plenaria Julia Novo	Charla Plenaria Luz Roncal	Charla Plenaria Natàlia Castellana	
9:45 – 10:30	Inauguración	Charla Plenaria Eustasio del Barrio	Mesa redonda <i>Cooperación al desarrollo en Matemáticas</i>	Charla Plenaria Francisco J. Aragón	Mesa redonda <i>La enseñanza de matemáticas en riesgo</i>	
	Charla Plenaria Gabriel Navarro					
10:30 – 11:00		Café	Café	Café	Café	
11:00 – 11:45	Café	Sesiones espciales, charlas contribuidas y pósteres	Salida autobús (11:15)	Sesiones espciales, charlas contribuidas y pósteres	Sesiones espciales, charlas contribuidas y pósteres	
11:45 – 12:30	Charla Plenaria Claudia García		Desplazamiento y visita previa a la comida			Charla de diuivgación en el Salón de Actos (Aulario II)
12:30 – 13:30	Charla Plenaria José A. Gálvez	Junta General de la RSME				
13:30 – 13:45				Foto (Aulario II)	Clausura	
13:45 – 15:15	Comida	Comida	Comida institucional del congreso	Comida	Cóctel de clausura	
15:30 – 16:30	Sesiones especiales, charlas contribuidas y pósteres	Sesiones espciales, charlas contribuidas y pósteres		Sesiones espciales, charlas contribuidas y pósteres	Salida autobús (15:45)	Jornadas de Formación para Profesorado de Secundaria - Jueves y viernes (15:30 – 20:00h)
16:30 – 17:30						
17:30 – 18:00	Salida autobús (17:45)	Café		Café	Visita a la casa natalicia de Jorge Juan Santacilia (Novelda)	
18:00 – 19:00	Visita al Castillo de Santa Bárbara y vino de honor	Sesiones espciales, charlas contribuidas y pósteres	Sesiones especiales, charlas contribuidas y pósteres			
19:00 – 20:00						

Noticias y enlaces relacionados

- [Página web del congreso \[2026.bienalrsme.com\]](http://2026.bienalrsme.com)
- [La Universidad de Alicante acogerá el Congreso Bienal de la RSME en 2026 \[rsme.es\]](http://rsme.es)
- [Página web y perfiles en RRSS de la Bienal de la RSME 2026 \[rsme.es\]](http://rsme.es)
- [Comités científico y organizador del Congreso Bienal de la RSME 2026 \[rsme.es\]](http://rsme.es)
- [Entrevista a Juan Matías Sepulcre, el Presidente del Comité Organizador \[rsme.es\]](http://rsme.es)
- [Algunas noticias publicadas en el boletín de la RSME \[rsme.es\]](http://rsme.es)
- [Más de 500 matemáticos y matemáticas se dan cita en Alicante en el Congreso Bienal de la RSME \[rsme.es\]](http://rsme.es)
- [La Universidad de Alicante acogerá el Congreso Bienal de la Real Sociedad Matemática Española en 2026 \[web.ua.es\]](http://web.ua.es)
- [La UA acoge del 19 al 23 de enero el Congreso Bienal de la Real Sociedad Matemática Española \[web.ua.es\]](http://web.ua.es)
- [Más de medio millar de matemáticos se reúnen en la UA en el Congreso Bienal de la Real Sociedad Matemática Española \[web.ua.es\]](http://web.ua.es)
- [La UA celebra en Novelda los 25 años de los Premios Jorge Juan de Matemáticas \[web.ua.es\]](http://web.ua.es)
- [La UA exhibe la belleza oculta de las matemáticas con «Imaginary, una mirada matemática» \[veu.ua.es\]](http://veu.ua.es)
- [Alicante, capital de las matemáticas \[informacion.es\]](http://informacion.es)
- [Medio millar de matemáticos analizan en Alicante el auge de la profesión y los riesgos en la enseñanza \[informacion.es\]](http://informacion.es)
- [“Las universidades y centros educativos pierden matemáticos porque no pueden competir con los salarios del sector privado” \[informacion.es\]](http://informacion.es)
- [Orígenes de las matemáticas con nombre de mujer \[rtve.es\]](http://rtve.es)
- [El número 6, la perfección, la divulgación y el año que España fue el centro del mundo en matemáticas \[rtve.es\]](http://rtve.es)
- [Més de mig miler de matemàtics es reuneixen en la UA en el Congrés Biennal de la Reial Societat Matemàtica Espanyola \[elperiodic.com\]](http://elperiodic.com)

- Las matemáticas que explican el accidente de Adamuz o la predicción meteorológica [larazon.es]
- El presente y futuro de la enseñanza de las matemáticas, a debate en el congreso de la RSME en la UA [novaciencia.es]
- Novelda se suma al Congreso Bienal de Matemáticas con visitas a la Casa Natalicia de Jorge Juan y Carmencita [noveldadigital.es]



2

Conferencias plenarias



Algoritmos de desglose para problemas de optimización y factibilidad

Francisco J. Aragón Artacho

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

francisco.aragon@ua.es

Cuando un problema de optimización posee cierta estructura, ya sea en la función objetivo o en las restricciones, suele resultar beneficioso aprovecharla. Siguiendo el principio de *divide y vencerás*, los algoritmos de desglose (*splitting algorithms*) se basan en la utilización por separado de las componentes del problema, resolviendo iterativamente problemas más sencillos que el original. En esta conferencia recordaremos algunos métodos clásicos y presentaremos algunos avances recientes en este tema, como son los algoritmos de desglose diseñados mediante grafos, así como ciertos métodos que permiten abordar problemas no convexos. Los algoritmos de desglose tienen aplicaciones prácticas relevantes en diferentes áreas, incluyendo algunos problemas en ciencia de datos.

Palabras clave: Métodos de proyección; Inclusiones monótonas; Algoritmos *forward-backward*.

Referencias

- [1] F. J. Aragón Artacho, H. H. Bauschke, R. Campoy, C. López-Pastor (2025). Graph splitting methods: Fixed points and strong convergence for linear subspaces. ArXiv: [2505.16564](#).
- [2] F. J. Aragón Artacho, R. Campoy, C. López-Pastor (2025). Forward-backward algorithms devised by graphs. ArXiv: [2406.03309](#)
- [3] F. J. Aragón Artacho, R. Campoy, M. K. Tam (2020). The Douglas–Rachford algorithm for convex and nonconvex feasibility problems. *Math. Meth. Oper. Res.*, 91, 201–240.
- [4] F. J. Aragón Artacho, M. A. Goberna (2024). *Mathematics in Politics and Governance*, Springer Cham. *Matemáticas en política y gobernanza*, Los Libros de la Catarata - Publicaciones UA.
- [5] F. J. Aragón Artacho, Y. Malitsky, M.K. Tam, D. Torregrosa-Belén (2023). Distributed forward-backward methods for ring networks. *Compt. Optim. Appl.*, 86, 845–870.
- [6] F. J. Aragón Artacho, P. Pérez-Aros, D. Torregrosa-Belén (2025). The Boosted Double-proximal Subgradient Algorithm for nonconvex optimization, *Math. Program.*, DOI: [10.1007/s10107-024-02190-0](#).
- [7] H. H. Bauschke, P. L. Combettes (2017). *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, 2nd edn. Springer.
- [8] K. Bredies, E. Chenchene, E. Naldi (2024). Graph and distributed extensions of the Douglas–Rachford method, *SIAM J. Optim.*, 34, 1569–1594.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Rubén Campoy, David Torregrosa Belén y César López Pastor, entre otros. Proyecto parcialmente financiado por PID2022-136399NB-C21, MCIN/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE.

On Hilbert's 19th problem on regularity for elliptic equations and recent extensions

Xavier Cabré

ICREA and Universitat Politècnica de Catalunya

xavier.cabre@upc.edu

In 1900 Hilbert's 19th problem asked whether minimizers of elliptic functionals are always analytic. But in fact, at that time, the existence of minimizers was not yet understood, even for the Dirichlet functional associated to the Laplacian. As pointed out in [1], it was Beppo Levi who demonstrated its existence in 1906 (with an extraordinary argument that we will review), giving rise to the “Riesz-Fréchet theorem” of 1907. We will continue with the progress made on the 19th Hilbert problem by explaining the celebrated result of De Giorgi and Nash in the late 1950s.

We will then turn into the regularity of stable solutions, a larger class than absolute minimizers. We will mention very recent results establishing long-standing conjectures: first for minimal surfaces (starting from the 2021 work of Chodosh and Li) and then for reaction-diffusion equations (describing our result [2]). We will finally mention more recent semilinear extensions of [2] and make a list of open problems.

Keywords: Regularity for nonlinear elliptic PDEs; Stable solutions; Semilinear elliptic equations; Minimal surfaces.

References

- [1] H. Brezis, F. Browder (1998). Partial differential equations in the 20th century. *Adv. Math.*, 135, 7–144.
- [2] X. Cabré, A. Figalli, X. Ros-Oton, J Serra (2020). Stable solutions to semilinear elliptic equations are smooth up to dimension 9. *Acta Math.*, 224, 187–252.

Acknowledgments. The author is supported by the Spanish grants PID2021-123903NB-I00 and RED2024-153842-T funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by ERDF “A way of making Europe”, and by the Catalan grant 2021-SGR-00087. He is also supported by the Spanish State Research Agency, through the Severo Ochoa and María de Maeztu Program for Centers and Units of Excellence in R&D (CEX2020-001084-M).

A categorical viewpoint on classical Quillen's stratification theorem for group cohomology

Natàlia Castellana Vila

Universitat Autònoma de Barcelona, and Centre de Recerca Matemàtica

`Natalia.Castellana@uab.cat`

Quillen's stratification theorem [1] establishes a connection of algebraic geometry ideas to ordinary algebraic topology, providing a geometric description of the cohomology of any finite group with coefficients in a field in terms of a decomposition of its Zariski spectrum into locally closed subsets indexed on the conjugacy classes of elementary abelian subgroups. In this project, we prove a generalization of Quillen's stratification, lifting from group cohomology to arbitrary equivariant cohomology theories. We provide generalizations of the classical theorem in two directions: we work with arbitrary commutative equivariant ring spectra as coefficients, and we categorify it to a result about categories of equivariant modules over the ring. The result is formulated in the language of equivariant tensor-triangular geometry [2]. This is joint work with T. Barthel, D. Heard, N. Naumann, L. Pol.

Keywords: Group cohomology; Equivariant homotopy; Tensor-triangulated categories.

References

- [1] D. Quillen (1971). The spectrum of an equivariant cohomology ring. I, II. *Ann. of Math.* (2), 94, 549–572; 573–602.
- [2] P. Balmer (2010) *Spectra, spectra, spectra – Tensor triangular spectra versus Zariski spectra of endomorphism rings*. *Algebr. Geom. Topol.* 10 (3), 1521–1563.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con T. Barthel, D. Heard, N. Naumann, L. Pol. Proyecto parcialmente financiado por PID2020-116481GB-I00, programa Severo Ochoa y María de Maeztu (CEX2020-001084-M), el programa CERCA de la Generalitat de Catalunya, y Comissionat per Universitats i Recerca de la Generalitat de Catalunya (No. 2021-SGR-01015).

Teoría distribucional límite para el transporte óptimo

Eustasio del Barrio

Instituto de Matemáticas (IMUVa), Universidad de Valladolid

eustasio.delbarrio@uva.es

El problema de transporte óptimo (TO) es un problema de asignación de recursos con aplicaciones en biología, ciencia de datos, economía y estadística, entre otras disciplinas. En algunas de estas aplicaciones, se tiene acceso a muestras que aproximan medidas continuas. Las cantidades de interés derivadas del TO –planes, aplicaciones y costes– sólo están disponibles, por tanto, en sus versiones empíricas. La inferencia estadística en TO tiene como objetivo encontrar intervalos de confianza para planes, aplicaciones y costes poblacionales, y esto se basa en el conocimiento aproximado (a través de teoremas centrales del límite, TCLs) de las distribuciones subyacentes de esas versiones empíricas.

Las primeras investigaciones sobre el tema se centraron en medidas en la recta real, basándose en la representación cuantíl de los plans de TO (véase [1, 2]). En los últimos años, este tema ha suscitado un interés creciente en la comunidad estadística, motivado en gran medida por la explosión de técnicas computacionales desarrolladas en torno al transporte óptimo entrópico y el algoritmo de Sinkhorn (véase [5]). Una técnica de linealización introducida en [4] proporciona CLT para el coste de transporte en dimensión general, también para el coste entrópico. Herramientas adicionales de la teoría de procesos empíricos permiten tratar otros objetos de interés (mapas y planes óptimos).

En esta charla ofreceré una revisión exhaustiva de los resultados más influyentes en este campo de investigación, subrayando su uso en algunas de las aplicaciones. Por último, proporcionaré una breve lista de problemas abiertos.

Palabras clave: Transporte óptimo; Teorema central del límite; Distancia de Wasserstein.

Referencias

- [1] E. del Barrio, J. Cuesta-Albertos, C. Matrán, J. Rodríguez-Rodríguez. (1999). Tests of goodness of fit based on the L2-Wasserstein distance. *Ann. Statist.*, 27, 1230–1239.
- [2] E. del Barrio, E. Giné, and C. Matrán. (1999). Central limit theorems for the Wasserstein distance between the empirical and the true distributions. *Ann. Probab.*, 27, 1009–1071.
- [3] E. del Barrio, A. González-Sanz, J. M. Loubes, D. Rodríguez-Vítóres (2025). Distributional limit theory for optimal transport. <https://arxiv.org/pdf/2505.19104>.
- [4] E. del Barrio, J. M. Loubes. (2019). Central limit theorems for empirical transportation cost in general dimension. *Ann. Probab.*, 47, 926–951 .
- [5] M. Cuturi. (2013). Sinkhorn distances: Lightspeed computation of optimal transport. *Proc. International Conference on Neural Information Processing Systems*, 2, 2292–2300.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Alberto González Sanz, Jean-Michel Loubes y David Rodríguez Vítóres y parcialmente financiado por PID2021-128314NB-I00, MCIN/AEI/10.13039/501100011033/FEDER.

Esferas con curvaturas predeterminadas

José Antonio Gálvez

Departamento de Geometría y Topología, IMAG, Universidad de Granada.

jagalvez@ugr.es

Un problema fundamental en geometría diferencial clásica es el estudio de las superficies en R^3 que cumplen una relación predeterminada $F(k_1, k_2, N) = 0$ entre sus curvaturas principales k_1, k_2 y su normal unitario N . En particular, los problemas clásicos de Christoffel, Minkowski y de curvatura media predeterminada caen en esta clase. En esta charla nos centraremos en diferentes resultados de unicidad relacionados con el problema anterior.

En particular, resolvemos completamente una conjetura de Alexandrov demostrando que si un ovaloide en R^3 cumple una relación elíptica del tipo $F(k_1, k_2, N) = 0$, entonces cualquier otra esfera inmersa en R^3 que cumpla la misma relación es una traslación de dicho ovaloide. También resolveremos un antiguo problema de H. Hopf, mostrando que las esferas métricas son las únicas esferas topológicas inmersas en R^3 cumpliendo una desigualdad cuasiconforme entre sus curvaturas principales.

Palabras clave: Superficies de curvaturas predeterminadas; EDPs elípticas; Aplicaciones cuasiconformes.

Referencias

- [1] A. D. Alexandrov (1956). Uniqueness theorems for surfaces in the large. *Vestnik Leningrad Univ.*, 11, 5–17.
- [2] J. A. Gálvez, P. Mira (2016). A Hopf theorem for non-constant mean curvature and a conjecture of A. D. Alexandrov. *Math. Ann.*, 366, 909–928.
- [3] J. A. Gálvez, P. Mira (2020). Uniqueness of immersed spheres in three-manifolds. *J. Differential Geom.*, 116, 459–480.
- [4] J. A. Gálvez, P. Mira (2021). Rotational symmetry of Weingarten spheres in homogeneous three-manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, 773, 21–66.
- [5] J. A. Gálvez, P. Mira (2025). Linearity of homogeneous solutions to degenerate elliptic equations in dimension three. *J. Eur. Math. Soc.*, to appear.
- [6] J. A. Gálvez, P. Mira, M. P. Tassi (2022). A quasiconformal Hopf soap bubble theorem. *Calc. Var. & PDEs*, 61, 20pp.
- [7] J. A. Gálvez, P. Mira, M. P. Tassi (2024). Analytic saddle spheres in S^3 are equatorial. *Math. Ann.*, 389, 3865–3884.
- [8] H. Hopf (1989) *Differential Geometry in the Large*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1000.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por PID2020-118137GB-I00, PID2024-160586NB-I00 y CEX2020-001105-M.

Patterns and equilibria in incompressible fluids

Claudia García

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada

`claudiagarcia@ugr.es`

The motion of a uniform incompressible fluid is described by the Navier-Stokes equations and, in its inviscid regime, via the Euler equations. In the two-dimensional case, the Euler equations in the vorticity formulation contain many interesting relative equilibria: stationary, rotating and translation solutions. Bifurcation theory arises naturally in the study of many PDE's, which can be characterized by an implicit equation of the form

$$F(\lambda, x) = 0, \tag{1}$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$ and x belongs to some infinite-dimensional Banach space. In this talk, we will take advantage of this theory to review the existence of different kind of solutions: V-states, non uniform rotating vortices or Karman Vortex Street type of solutions, among others. All those simplified dynamics are governed by a nonlinear and nonlocal equation of type (1).

Keywords: Euler equations, incompressible fluids, bifurcation theory.

Agradecimientos. Trabajos en colaboración con Z. Hassainia, S. Haziot, T. Hmidi, J. Mateu, E. Roulley, J. Soler. Proyecto parcialmente financiado por YC2022-035967-I (MCIU/AEI/10.13039/501100011033 and FSE+) y Beca Leonardo de Investigación Científica y Creación Cultural 2024 de la Fundación BBVA.

Caracteres Correspondientes en Grupos Finitos

Gabriel Navarro

Departamento de Matemáticas, Universitat València

gabriel@uv.es

Dos de las conjeturas más importantes en la Teoría de Representaciones de Grupos Finitos han sido probadas recientemente ([1], [2], [4]): la Conjetura de Altura Cero de Richard Brauer (1955), y la Conjetura de Grados de McKay (1971). En la demostración de ambas, se ha utilizado la Clasificación de los Grupos Finitos Simples. Una de las ideas fundamentales en la resolución ha sido asociar a cada carácter de un grupo simple otro carácter de un subgrupo local que milagrosamente se comporta como él ([3]). Se ha tardado casi 20 años en poder comprobar esto. Esta idea está siendo aplicada para resolver otras conjeturas globales/locales como la conjetura de Pesos de Alperin, las diversas extensiones de McKay e incluso la conjetura de Feit sobre cuerpos de valores. El propósito de nuestra conferencia será explicar todo esto con más detalle.

Palabras clave: Caracteres de Grupos Finitos; Bloques de Brauer; Altura Cero; Conjetura de McKay.

Referencias

- [1] M. Cabanes, B. Späth (2025). The McKay Conjecture on character degrees. arXiv: 2410.20392, será publicado en *Ann. of Math.*
- [2] G. Malle, G. Navarro, A. Schaeffer-Fry, P. H. Tiep (2024). Brauer's Height Zero Conjecture. *Ann. of Math.*, 200, 557–608.
- [3] I. M. Isaacs, G. Malle, G. Navarro (2007). A reduction theorem for the McKay conjecture. *Invent. Math.* 170, 33–101.
- [4] L. Rusthorfer (2025), The Alperin–McKay and Brauer's height zero conjecture for the prime 2. *Ann. of Math.* 201, 379–457.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con I. M. Isaacs, G. Malle, A. Schaeffer–Fry, P. H. Tiep.

Reduced order methods for parametric time-dependent partial differential equations

Julia Novo

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

julia.novo@uam.es

Reduced-order methods can significantly reduce the computational cost required to obtain numerical approximations while also trying to provide sufficiently accurate approximations. A frequent case is that of equations that depend on one or several parameters. The challenge in this case is to provide accurate approximations for parameter values that are no part of the dataset used to compute the reduced-order basis. In this talk, we consider a type of reduced order methods that are called proper orthogonal decomposition (POD) methods.

In the present talk we propose a new POD method for parametric time dependent reaction-diffusion partial differential equations. The method is based on finite differences (respect to time and parameters) of some snapshots. The snapshots are finite element approximations evaluated at different times and values of parameters in a selected set. The method is designed in such a way that pointwise in time estimates can be proved at any time in a given interval. The a priori bounds are also valid for any value of the parameters (including out of sample values). The error in the POD approximations depend on the tail of the eigenvalues (sum of nonzero eigenvalues of the correlation matrix of the data set in the POD method, starting from a selected one) and on the distance between two consecutive values of time where the snapshots are taken and the distance between two consecutive values of the parameters. We also consider a standard POD method based on the set of snapshots for different values of time and parameters and prove analogous error bounds using the techniques developed for the new method. For the standard case the bounds are quasi-optimal, as the exponent in the tail of the eigenvalues depends on the smoothness of the finite element approximations. As smoother the approximations are, the closer the exponent gets to the optimal value one.

Some numerical experiments show the performance of both new and tradicional methods.

Keywords: POD-ROM methods; parametric equations; reaction-diffusion equations; pointwise estimates in time.

References

- [1] B. García-Archilla, V. John, J. Novo (2025). POD-ROM methods: from a finite set of snapshots to continuous-in-time approximations *SIAM J. Numer. Anal.*, 63, 800–826.
- [2] B. García-Archilla, A. García-Mascaraque, J. Novo (2025). POD-ROM methods: error analysis for continuous parametrized approximations (enviado).

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Bosco García-Archilla, Alicia García-Mascaraque y Volker John. Proyecto parcialmente financiado por PID2022-136550NB-I00.

Endpoint estimates for the fractal circular maximal function and related local smoothing

Luz Roncal

Basque Center for Applied Mathematics

lroncal@bcamath.org

The spherical maximal function is the operator defined by

$$\sup_{t>0} \left| \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x - ty) d\sigma(y) \right| \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

where $d\sigma$ is the normalized surface measure on the unit sphere $\mathbb{S}^{d-1}$. E. M. Stein (for $d \geq 3$) and J. Bourgain (for $d = 2$) proved that this operator is bounded on $L^p(\mathbb{R}^d)$ if and only if $p > d/(d - 1)$. The spherical maximal function is a relevant object in harmonic analysis, connected to the solutions of the wave equation and related smoothing properties, and variants of it have been widely studied in the literature. In recent times, there has been an increasing interest in understanding sharp forms of L^p – L^q estimates for the spherical maximal function when the supremum is taken over dilation sets of fractal dimensions of different nature. In this talk we will give a general overview of the topic, and present our contributions. More particularly, we will prove missing endpoint estimates for the fractal spherical maximal function which were open when $d = 2$, and study closely related L^p – L^q local smoothing estimates for the wave operator over fractal dilation sets. Our approach relies on bilinear restriction estimates for the cone due to T. Wolff and T. Tao.

This is joint work with Sanghyuk Lee, Feng Zhang, and Shuijiang Zhao.

Keywords: Fractal set; circular maximal function; local smoothing.

Acknowledgments. The author is supported by the Basque Government through the BERC 2022-2025 program and by the Spanish Ministry of Science and Innovation: BCAM Severo Ochoa accreditation CEX2021-001142-S/MICIN/AEI/10.13039/501100011033, PID2023-146646NB-I00 funded by MICIU/AEI/10.13039/501100011033 and by ESF+ and CNS2023-143893, and by IKERBASQUE

3

Sesiones especiales



Sesión especial 1

Advances in Linear Algebra, Matrix Analysis and their Applications

Equipo organizador:

- *Álvaro Samperio Valdivieso* (CUNEF Universidad)
- *Gorka Armentia Galán* (Universidad del País Vasco UPV/EHU)

Descripción

Las ponencias de esta sesión, expuestas por miembros de la Red de Excelencia ALAMA, ofrecerán un amplio abanico de temas clásicos y recientes cuyo hilo conductor es el álgebra lineal y el análisis matricial; en concreto, se abarcarán áreas tales como la teoría de matrices (factorización de matrices, matrices estructuradas, matrices totalmente positivas...), matrices polinomiales y racionales, matrices aleatorias, caminos aleatorios en redes, teoría de control, sistemas lineales y sus soluciones, retículos, la teoría espectral de matrices y problemas inversos de autovalores. El conjunto de estas comunicaciones tendrá un doble objetivo: por un lado, presentar los avances recientes en resultados fundamentales y, por otro lado, mostrar diversas aplicaciones, tales como la regresión polinomial -en estadística- o el desarrollo de métodos numéricos (entre otros, para la integración y evaluación de funciones) precisos y estables.

Palabras clave: teoría de control lineal; teoría espectral de matrices; subespacios; algoritmos numéricos; caminos aleatorios.

Programa

JUEVES, 22 de enero

- 11:00 – 11:30 Miguel Carriegos (Universidad de León)
Álgebra lineal en la categoría de las acciones de realimentación
- 11:30 – 12:00 Aida Abiad (Eindhoven University of Technology)
A spectral approach to Kemeny's constant
- 12:00 – 12:30 Alicia Roca (Universitat Politècnica de València)
On row completion of polynomial and rational matrices and partial prescription of their eigenstructures
- 12:30 – 13:00 M. Eulàlia Montoro (Universidad de Barcelona)
Endomorfismos con subespacios hiperinvariantes isomorfos
- 15:30 – 16:00 Carlos Marijuán (Universidad de Valladolid)
The INIEP
- 16:00 – 16:30 Julio Moro (Universidad Carlos III de Madrid)
Compensation of signs in the Symmetric Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem
- 16:30 – 17:00 Francisco Enrique Velasco (UPV/EHU)
Matriz más próxima con un valor propio prescrito con característica de Weyr mayorizando a la partición $(2, 1)$
- 17:00 – 17:30 Laureano González-Vega (CUNEF Universidad)
Characterising the eigenvalues of QM -matrices and $Q^{1,2}$ -matrices
- 18:00 – 18:30 Àlvar Martín (Universitat Politècnica de Catalunya)
Green Matrices in Schrödinger-Type Network
- 18:30 – 19:00 Begoña Cantó (Universitat Politècnica de València)
The study of the combined matrices

VIERNES, 23 de enero

- 11:00 – 11:30 José-Javier Martínez (Universidad de Alcalá de Henares)
Accurate computation of the hat matrix in polynomial regression
- 11:30 – 12:00 Esmeralda Mainar (Universidad de Zaragoza)
Stability and Accuracy in Bernstein Representations
- 12:00 – 12:30 Ujué Etayo (CUNEF Universidad)
Random matrices and optimal point configurations

Álgebra lineal en la categoría de las acciones de realimentación

Miguel V. Carriegos

Departamento de Matemáticas, Universidad de León

miguel.carriegos@unileon.es

El estudio matemático de los sistemas de control se remonta a 1868 con unos primeros trabajos de Maxwell [5] sobre el control del regulador de bolas para la máquina de vapor donde se introduce la noción de realimentación. El año 1943 nace la Cibernética como disciplina científica que unifica la realimentación como herramienta fundamental desde control automático de sistemas hasta la actividad del sistema nervioso humano, los métodos de comportamiento y de aprendizaje [1, 6, 7].

Los sistemas dinámicos lineales constituyen la parte más básica y, a la vez, más efectiva de la teoría de control. Brunovsky [3] y Kalman clasifican los sistemas lineales sobre espacios vectoriales en 1970, pero el problema general de clasificación de sistemas lineales es *wild* [2]. No obstante, el problema de clasificación de sistemas lineales sobre R -módulos se resuelve en 2013 [4] para cualquier anillo conmutativo R en la clase de sistemas *regulares*.

En esta charla revisaremos la noción de morfismo en la categoría de sistemas lineales y acciones de realimentación como la adecuada generalización de las acciones de realimentación, que resultarán ser los isomorfismos de la categoría. También introduciremos la maquinaria de álgebra lineal necesaria para estudiar los morfismos de realimentación: núcleos, conúcleos y estructura exacta en la categoría de sistemas lineales. Finalmente revisaremos los resultados clásicos de descomposición de sistemas. En particular encontraremos los objetos simples en la categoría de sistemas lineales y probaremos que la categoría de sistemas lineales es semisimple en objetos.

Referencias

- [1] M. Arbib (1987). *Brains Machines and Mathematics*. Springer-Verlag.
- [2] J. W. Brewer, L. Klingler (2001). On feedback invariants for linear dynamical systems. *Linear Algebra Appl.*, 325, 209–220.
- [3] P. A. Brunovsky (1970). A classification of linear controllable systems. *Kybernetika* 3, 173–187.
- [4] M. V. Carriegos (2013). Enumeration of classes of linear systems via equations and via partitions in a ordered abelian monoid. *Linear Algebra Appl.*, 438, 1132–1148.
- [5] J. C. Maxwell (1868). On Governors. *Proc. Roy. Soc.* 16, 270–283.
- [6] W. S. McCulloch, W. H. Pitts (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bull. Math. Biophys.* 5, 115–133.
- [7] A. Rosenblueth, N. Wiener and J. Bigelow (1943). Behavior, Purpose and Teleology. *Philos. Sci.* 10, 18–24.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Grupo de Investigación CAFE, Universidad de León.

A spectral approach to Kemeny's constant

Aida Abiad

Department of Mathematics and Computer Science, Eindhoven University of Technology

a.abiad.monge@tue.nl

Kemeny's constant, a fundamental parameter in the theory of Markov chains, has recently received significant attention within the graph theory community. Originally defined for a discrete, finite, time-homogeneous, and irreducible Markov chain based on its stationary vector and mean first passage times, Kemeny's constant finds special relevance in the study of random walks on graphs. Kemeny's constant gives a measure of how quickly a random walker can move around a graph and is thus a good measure of the connectivity of a graph. Kemeny's constant has many useful interpretations, including the spread of infectious diseases (how quickly a disease will reach epidemic levels), molecular conformation dynamics (presence or absence of metastable sets), and urban road networks (how well connected a network is). In general, a lower Kemeny's constant means that a graph is more connected, and a higher Kemeny's constant means that a graph is less connected. For these and other applications, the main question is: how do changes in the network lead to changes in Kemeny's constant? In this talk we investigate the effect of the network structure on Kemeny's constant. We do so by showing several new approximations for Kemeny's constant, which we derive using spectral graph theory techniques.

On row completion of polynomial and rational matrices and partial prescription of their eigenstructures

Alicia Roca, Agurtzane Amparan, Itziar Baragaña, Silvia Marcaida

Departamento de Matemática Aplicada, IMM, Universidad Politécnica de València

aroca@mat.upv.es

We solve the problem of characterizing the existence of a polynomial or a rational matrix when its complete structural data and some of its rows are prescribed. The complete structural data of a rational matrix is formed by the invariant rational functions, the invariants orders at infinity, and the column and row minimal indices.

We have also solved the same problem under partial prescription of the structural data, i.e., we have characterized the existence of a polynomial or a rational matrix when only some of the four types of invariants are prescribed leaving some freedom for the rest of them. The problem have been solved completely, analyzing the 15 different cases of partial prescription. We show here some examples.

References

- [1] A. Amparan, I. Baragaña, S. Marcaida, A. Roca (2024). Row or column completion of polynomial matrices of given degree. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 45(1), 478–503.
- [2] A. Amparan, I. Baragaña, S. Marcaida, A. Roca (2025). Row or column completion of polynomial matrices of given degree II. *Linear Algebra Appl.*, 798, 252–279.
- [3] A. Amparan, I. Baragaña, S. Marcaida, A. Roca (2025). Row completion of polynomial and rational matrices. *Linear Algebra Appl.*, 720, 109-138.
- [4] A. Amparan, I. Baragaña, S. Marcaida, A. Roca (2025). Row completion of polynomial and rational matrices II. Preprint.

Endomorfismos con subespacios hiperinvariantes isomorfos

M. Eulàlia Montoro, David Minguez, Alicia Roca

Departamento de Matemáticas e Informática, Universidad de Barcelona

eula.montoro@ub.es

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo arbitrario, sea $f \in \text{End}(\mathbb{F}^n)$ un endomorfismo. Tres retículos de subespacios vectoriales se asocian de forma natural al endomorfismo f : el retículo de los subespacios invariantes ([1], [3]), el de los subespacios característicos ([4]) y el de los subespacios hiperinvariantes ([2]).

Un subespacio vectorial $V \subseteq \mathbb{F}^n$ es *invariante* respecto a $f \in \text{End}(\mathbb{F}^n)$ si $f(V) \subset V$, es *hiperinvariante* si es invariante para todo $g \in \text{End}(\mathbb{F}^n)$ tal que $gf = fg$. Un subespacio invariante es *característico* si es invariante para todo $g \in \text{Aut}(\mathbb{F}^n)$ tal que $gf = fg$.

Una caracterización de los isomorfismos entre retículos de subespacios invariantes puede encontrarse en [1]; los isomorfismos entre retículos de subespacios característicos son actualmente objeto de estudio. En este trabajo presentamos una caracterización de los isomorfismos entre retículos de subespacios hiperinvariantes ([5]) (ver también [6]). El propósito de esta charla es mostrar algunas ideas sobre esta última caracterización y algunas de las técnicas usadas en su resolución.

Referencias

- [1] L. Brickman, P. A. Fillmore (1967). The invariant subspace lattice of a linear transformation. *Can. J. Math.*, 19, 35, 810–822.
- [2] P. A. Fillmore, D. A. Herrero and W. E. Longstaff (1977). The hyperinvariant subspace lattice of a linear transformation. *Linear Algebra Appl.* 17, 125–132.
- [3] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman (1986). *Invariant Subspaces of Matrices with Applications*. SIAM.
- [4] D. Minguez, M. E. Montoro, A. Roca (2018). The lattice of characteristic subspaces of an endomorphism with Jordan-Chevalley decomposition. *Linear Algebra Appl.*, 558, 63–73.
- [5] D. Minguez, M. E. Montoro, A. Roca (2024). Isomorphisms between lattices of hyperinvariant subspaces. *Linear Algebra Appl.*, 703, 395–422.
- [6] P. Y. Wu (1992). Which linear transformations have isomorphic hyperinvariant subspace lattices? *Linear Algebra Appl.*, 169, 163–178.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con David Minguez y Alicia Roca. Proyecto parcialmente financiado por PID2021-124827NB-I00 y por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

The INIEP

Carlos Marijuán

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid

cmarijuan@uva.es

A list Λ of n complex numbers is said to be *realizable* if there exists an n -by- n nonnegative matrix whose spectrum is Λ . The problem of characterizing all realizable lists Λ is the *Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem* (NIEP), see [2]. Another approach to the NIEP is to view a nonnegative matrix as the adjacency matrix of a weighted digraph and focus the attention on the coefficients of its characteristic polynomial $P(x)$, see [1, 4]. The polynomial $P(x)$ is said to be *realizable* if there is a weighted digraph (equivalently an entry-wise nonnegative matrix) whose characteristic polynomial is $P(x)$.

An n -by- n matrix is *irreducible* if it is not similar by a permutation matrix to a nontrivially block triangular matrix. A digraph is strongly connected if every two vertices are joined by a path. Strongly connected digraphs are exactly the ones that have an irreducible adjacency matrix. Our interest here lies in identifying, among realizable spectra/polynomials, those that are realizable by an irreducible matrix/a strongly connected weighted digraph. This problem is the *irreducible* NIEP (INIEP).

After giving some general background, we make some useful new observations and show the existence of irreducible nonnegative realizations in some general cases. Then, we focus on $n < 5$, where the NIEP is solved. Finally, we focus on the trace 0 case and, using graph theoretic methods, characterize nonnegative irreducible realizability among realizable polynomials, [3].

References

- [1] D. M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs (1995) *Spectra of Graphs*. Johann Ambrosius Barth.
- [2] C. R. Johnson, C. Marijuán, P. Papparella, M. Pisonero (2018). The NIEP. *Operator theory, operator algebras, and matrix theory*. Birkhäuser/Springer, 353-372.
- [3] C. R. Johnson, C. Marijuán, M. Pisonero (2025). Irreducible Nonnegative Realizations of Certain Spectra (submitted).
- [4] J. Torre-Mayo, M. R. Abril-Raymundo, E. Alarcia-Estévez, C. Marijuán, M. Pisonero (2007). The nonnegative inverse eigenvalue problem from the coefficients of the characteristic polynomial. EBL digraphs. *Linear Algebra Appl.* 426, 729-773.

Acknowledgments. Joint work with Charles R. Johnson and Miriam Pisonero. Partially supported by grant PID2022-138906NB-C21 funded by MCIU/AEI/10.13039/501100011033 and by ERDF “A way of making Europ”.

Compensation of signs in the Symmetric Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem

Julio Moro, Carlos Marijuán

Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid

jmoro@math.uc3m.es

C-realizability was originally introduced in [1] as a sufficient condition for the Real Nonnegative Inverse Eigenvalue problem (RNIEP)^a. It was shown back then that C-realizability included as particular cases most of the known sufficient conditions for the RNIEP.

It was not until 2017 that it was shown in [2] that C-realizability was more closely related to the Symmetric Nonnegative Inverse Eigenvalue problem (SNIEP)^b than to the RNIEP.

The combinatorial nature of the original definition of C-realizability has conducted over the years to combinatorial characterizations of the set of C-realizable lists. In this talk we will first review a partial one, obtained in [4] for real lists with zero sum, and then the most general combinatorial characterization, obtained in [5] for arbitrary lists of real numbers. One of the most remarkable consequences of the latter characterization is that it proves the monotonicity of C-realizability, i.e., that the operation of increasing any positive entry of a C-realizable list preserves C-realizability.

^aThe RNIEP consists, for a given positive integer n , in characterizing those lists of n real numbers which are the spectrum of some $n \times n$ matrix with real entries.

^bThe SNIEP consists, for a given positive integer n , in characterizing those lists of n real numbers which are the spectrum of some $n \times n$ real symmetric matrix. It is known since 1996, see [3], that the two problems are different.

References

- [1] A. Borobia, J. Moro, R. L. Soto (2008). A unified view on compensation criteria in the real nonnegative inverse eigenvalue problem. *Linear Algebra Appl.*, 428, 2574–2584.
- [2] R. Ellard & H. Smigoč (2017). Connecting sufficient conditions for the Symmetric Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem. *Linear Algebra Appl.*, 498, 521–552.
- [3] C. R. Johnson, T. J. Laffey & R. Loewy (1996). The Real and the Symmetric Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem are different. *Proc. Am. Math. Soc.*, 124, 3647–3651.
- [4] C. Marijuán & J. Moro. (2021) A characterization of trace-zero sets realizable by compensation in the SNIEP. *Linear Algebra Appl.*, 615, 42–76.
- [5] C. Marijuán & J. Moro. (2024) A characterization of sets realizable by compensation in the SNIEP. *Linear Algebra Appl.*, 693, 425–447.

Matriz más próxima con un valor propio prescrito con característica de Weyr mayorizando a la partición $(2, 1)$

Francisco Enrique Velasco, Gorka Armentia, Juan-Miguel Gracia

Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco UPV/EHU

franciscoenrique.velasco@ehu.eus

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Denotemos por $\|\cdot\|$ a la norma espectral. Tratamos de determinar la distancia de A al conjunto de matrices Z que tienen a z_0 como valor propio cuya partición, $w(z_0, Z)$, en la característica de Weyr de Z mayoriza a $(2, 1)$. Concretamente, pretendemos probar la igualdad

$$\min_{\substack{Z \in \mathbb{C}^{n \times n} \\ (2,1) \preceq w(z_0, Z)}} \|Z - A\| = \max_{t \geq 0} \sigma_{2n-2} \left(\begin{bmatrix} z_0 I_n - A & t I_n \\ O & z_0 I_n - A \end{bmatrix} \right).$$

Referencias

- [1] G. Armentia, J. M. Gracia, F. E. Velasco (2020). Nearest matrix with a prescribed eigenvalue of bounded multiplicities. *Linear Algebra Appl.*, 592, 188-209.
- [2] Kh. D. Ikramov, A. M. Nazari (2003). On the distance to the closest matrix with triple zero eigenvalue. *Mathematical Notes*, 73 no. 4, 511–520.
- [3] A. N. Malyshev (1999). A formula for the 2-norm distance from a matrix to the set of matrices with multiple eigenvalues. *Numer. Math.*, 83 no. 3, 443–454.
- [4] E. Mengi (2011). Locating a nearest matrix with an eigenvalue of prespecified algebraic multiplicity. *Numer. Math.*, 118, 109–135.

Agradecimientos. Trabajo con Juan-Miguel Gracia y Gorka Armentia. Proyecto parcialmente financiado por PID2021-124827NB-I00, RED2022-134176-T -concedidos por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por “ERDF A way of making Europe” de la Unión Europea- y por GIU21/020 -concedido por la UPV/EHU-.

Characterising the eigenvalues of QM -matrices and $Q^{1,2}$ -matrices

Laureano González-Vega

Departamento de Métodos Cuantitativos, CUNEF Universidad

laureano.gonzalez@cunef.edu

P -matrices are matrices all of whose principal minors are positive. Q -matrices are matrices whose sums of principal minors of the same order are positive. A matrix is a PM -matrix if all its powers are P -matrices. A matrix is a QM -matrix if all its powers are Q -matrices. The study of the eigenvalues of these matrices (and its powers) brings many open questions. For example it was not known until 2024 that the eigenvalues of a PM -matrix are necessarily positive or it is not known if the eigenvalues of a matrix A such that A and A^2 are P -matrices necessarily have positive real parts. In order to study these two questions, we will characterise the real QM -matrices up-to size 4 and we characterise those real matrices A , 4×4 , such that A and A^2 are Q -matrices but not all eigenvalues of A have positive real part.

Green Matrices in Schrödinger-Type Network

Àlvar Martín, Ángeles Carmona, Andrés Encinas, María José Jiménez

Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya

alvar.martin.llopis@upc.edu

This paper introduces and studies a generalization of classical random walks on finite networks, called Schrödinger random walks. Unlike classical random walks, this model allows for nonzero stay probabilities at nodes and incorporates node-specific weights, as well as a potential parameter $\lambda \geq 0$.

The authors begin by introducing a generalized transition matrix in which transition probabilities are based on a conductance function and a positive weight function ω , leading to a new transition matrix $P_{\lambda, \omega}$ that depends on both λ and ω . Building on this, the authors define a Schrödinger-type operator $L_{\lambda, \omega}$, which is symmetric, positive semidefinite, and becomes singular when $\lambda = 0$.

The study then focuses on generalized inverses of the matrix $F_{\lambda, \omega} = L_{\lambda, \omega} - \lambda \omega \omega^T$. Among these, particular attention is given to its group inverse, which plays a central role in solving the Poisson equation and in characterizing the dynamics of the random walk. Using this framework, the authors derive the Mean First Passage Times matrix (MFPT) in terms of the generalized inverses, and the classical notion of Kemeny constant.

Finally, we introduce the concept of equilibrium measure and its associated capacity. These allow for the construction of an equilibrium matrix, which is shown to be a valid Green matrix. This perspective offers an alternative and physically meaningful way to express both the MFPT and Kemeny's constant.

References

- [1] Á. Carmona, M. J. Jiménez, À. Martín (2023). Mean first passage time and Kemeny's constant using generalized inverses of the combinatorial Laplacian. *Linear Multilinear A.*, 1–15.
- [2] Á. Carmona, A. M. Encinas, M. J. Jiménez, À. Martín (2023). Random Walks associated with symmetric M -matrices. *Linear Algebra Appl.*, 693, 324–338.
- [3] Á. Carmona, A. M. Encinas, M. J. Jiménez, À. Martín. Network Parameters via Equilibrium Measures in Schrödinger Random Walks. Submitted.
- [4] E. Bendito, Á. Carmona, A. M. Encinas, J. M. Gesto (2010). Characterization of symmetric M -matrices as resistive inverses. *Linear Algebra Appl.*, 430, 1336–1349.

Acknowledgments. This work has been partly supported by the Spanish Research Council (Ministerio de Ciencia e Innovación) under project PID2021-122501NB-I00 and by the Universitat Politècnica de Catalunya under funds AGRUPS 2023.

The study of the combined matrices

Begoña Cantó, Rafael Cantó, Ana Maria Urbano

Instituto de Matemática Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València, 46071 València, Spain

bcanto@mat.upv.es

A combined matrix is defined as a square matrix $\mathcal{C}(A) = A \circ A^{-T}$, where $A = (a_{ij})$ is a nonsingular matrix and $\circ$ denotes the Hadamard (entrywise) product. In control theory, this matrix is known as the Relative Gain Array (RGA) matrix [1], and it plays a key role in selecting optimal input–output pairings in multivariable process control systems. Toeplitz matrices, characterized by constant entries along each diagonal, are an important class of structured matrices and have been widely studied for their algebraic and computational properties (see, for example, [2]).

In this work, we explore the structure of the combined matrix $\mathcal{C}(A)$ when the original matrix A is a Toeplitz matrix with a prescribed tridiagonal structure. We focus on a perturbed family of such matrices, where the classical tridiagonal Toeplitz form is modified by introducing a scalar factor k in the $(1, 2)$ entry. Specifically, we consider matrices of the form

$$A_n^{(12)} = T^{(12)}(n; c, a, b) = \begin{pmatrix} a & kb & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}, \quad k \notin \{0, 1\}.$$

This extends the study initiated in [3], where the combined matrices of classical tridiagonal Toeplitz matrices were shown to be bisymmetric and doubly quasi-stochastic under the condition $bc = a^2$. Here, we prove that when $bc = a^2$, the combined matrix $\mathcal{C}(A_n^{(12)})$ always exists despite the perturbation, and we provide its explicit analytical form.

References

- [1] E. Bristol (1966). On a new measure of interaction for multivariable process control. *IEEE Trans Automat Contr.*, 11, 133–134.
- [2] A. M. Encinas, M. J. Jiménez (2018). Explicit inverse of a tridiagonal (p,r)-Toeplitz matrix. *Linear Algebra Appl.*, 542, 402–421.
- [3] B. Cantó, R. Cantó, A. M. Urbano (2025). Combined Matrix of a Tridiagonal Toeplitz Matrix. *AXIOMS*, 14 (375), 1–21.

Accurate computation of the hat matrix in polynomial regression

José-Javier Martínez, Ana Marco, Raquel Viaña

Departamento de Física y Matemáticas, Universidad de Alcalá

jjavier.martinez@uah.es

This talk deals with an example of the application of numerical linear algebra to statistics: the computation of the *hat matrix* (the projection matrix) in polynomial regression. A main tool is the use of the *QR factorization*, presented by G. H. Golub in [1]. In connection with this issue, it is interesting to recall the sentence by Golub included in [2]: *So I tried to get the statisticians interested in doing numerical computations. A few people were interested in it, but I don't think it had a heavy influence in statistics. I doubt if today people really use decomposition methods rather than normal equations. Statisticians are fairly fixed in their ways.*

Here we will mainly consider the accurate computation of the hat matrix (see [3]), whose role in statistics is analyzed in detail in [6]. The use of the Lagrange basis for polynomial least squares fitting has recently been addressed in [5], but now we will be using the *monomial basis*, which leads to the use of *Vandermonde matrices*. When using the monomial basis and nonnegative nodes ordered as $0 \leq x_1 < \dots < x_n$, then the corresponding (rectangular) Vandermonde matrix is *totally nonnegative*, and for this class of matrices P. Koev has introduced in [3] an algorithm to compute the *QR* factorization starting from the bidiagonal decomposition of the corresponding matrix.

We will show how to apply these tools to accurately compute the hat matrix H in polynomial regression problems. Also, from the point of view of computational complexity it is interesting to observe (see subsection 10.2 of [6]) that in certain applications only the diagonal entries of H are needed.

References

- [1] G. H. Golub (1965). Numerical Methods for Solving Linear Least Squares Problems. *Numerische Mathematik*, 7, 206–216.
- [2] N. H. Higham (2008). An interview with Gene Golub. *MIMS Eprint 2008.8*. Manchester Institute for Mathematical Sciences, Univ. of Manchester.
- [3] D. C. Hoaglin, R. E. Welsch (1978). The hat matrix in regression and ANOVA. *The American Statistician*, 32(1), 17–22.
- [4] P. Koev (2007). Accurate computations with totally nonnegative matrices. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 29, 731–751.
- [5] A. Marco, J. J. Martínez, R. Viaña (2024). Total positivity and least squares problems in the Lagrange basis. *Numer. Linear Algebra Appl.* 2024, e2554.
- [6] G. A. F. Seber, A. J. Lee (2003) *Linear Regression Analysis (2nd edition)*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley-Interscience, Hoboken, NJ.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por el proyecto de investigación PID2022-138569NB-I00 del Gobierno de España.

Stability and Accuracy in Bernstein Representations

Esmeralda Mainar, Jorge Delgado, Juan Manuel Peña.

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

esmemain@unizar.es

Building on foundational insights into the accuracy and stability of numerical algorithms (cf. [1]), this talk offers a comprehensive overview of recent backward and forward error analyses for corner-cutting algorithms used in the evaluation of functions expressed in Bernstein and Bernstein-related bases, both univariate and multivariate. We revisit key results on the conditioning of these bases, highlighting their implications for numerical stability.

The talk also presents recent progress in the development of algorithms that exploit the structure of totally positive matrices. These methods enable the accurate and efficient solution of interpolation and approximation problems in Bernstein-type bases, achieving high relative accuracy even in challenging computational settings.

References

- [1] N. J. Higham, (2002). *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms: Second Edition*. SIAM.

Acknowledgments. This work was partially supported through the Spanish research grants PID2022-138569NB-I00 and RED2022-134176-T (MCI/AEI) and by Gobierno de Aragón (E41_23R).

Random matrices and optimal point configurations

Ujué Etayo

Departamento de Matemáticas, CUNEF Universidad

ujue.etayo@cunef.edu

We begin with the following problem: we aim to identify families of points (i.e., sequences of sets of points) in 2-point homogeneous spaces for use in integration processes via the Monte Carlo method. One way to assess the quality of a family of points is by computing its discrepancy: families with low discrepancy constitute suitable integration nodes. In this work, we propose the use of point families derived from random matrices and compute the discrepancy associated with such families.

Agradecimientos. Proyecto PID2020-113887GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por la starting grant de la FBBVA asociada al premio José Luis Rubio de Francia.

Sesión especial 2

Álgebra Computacional y Aplicaciones

Equipo organizador:

- *Philippe Gimenez* (Universidad de Valladolid)
- *Sonia Pérez-Díaz* (Universidad de Alcalá)
- *Ana Romero* (Universidad de La Rioja)

Descripción

El álgebra computacional es un área de investigación de carácter interdisciplinar cuyo cometido principal es el desarrollo, construcción y análisis de algoritmos efectivos que manipulen objetos simbólicos susceptibles de ser representados en un ordenador, con especial énfasis en los cálculos correspondientes a objetos de entidad matemática y con vistas a sus aplicaciones, no sólo en la propia matemática, sino también en otras ramas de la ciencia (como la física, la química, la biología, la medicina, etc.) e incluso en la industria.

La lista de ponentes propuesta incluye en su mayoría a jóvenes investigadores españoles, pre o postdoctorales, que se dedican a áreas muy diversas como el álgebra conmutativa, la topología computacional, la estadística algebraica, la teoría de grafos, o la criptografía, y que, de alguna manera, usan el álgebra computacional. Además, se han incluido a dos miembros del comité científico de la Red EACA, Ana Romero (coordinadora de la Red) e Ignacio García-Marco.

Palabras clave: Álgebra Computacional; Algoritmos; Bases de Gröbner; Aplicaciones; Demostración automática.

Programa

JUEVES, 22 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:30 | Ana Romero (Universidad de La Rioja)
<i>New biomedical applications of topological data analysis</i> |
| 11:30 – 12:00 | Marina Garrote-López (KTH Royal Institute of Technology)
<i>Estadística Algebraica en OSCAR</i> |
| 12:00 – 12:30 | Alexandru Iosif (Universidad Rey Juan Carlos)
<i>Discriminants à la Sturm for families of affine sections of positive toric varieties</i> |
| 12:30 – 13:00 | Gonzalo Rodríguez-Pajares (Universidad de Valladolid, IMUVa)
<i>A combinatorial description of when a self-dual set of points fails to be arithmetically Gorenstein</i> |
| 15:30 – 16:00 | Sara Asensio (Universidad de Valladolid e IMUVa)
<i>On the shadow of Betti diagrams of edge ideals</i> |
| 16:00 – 16:30 | Rodrigo Iglesias (Universidad de La Rioja)
<i>Cellular free resolutions induced by involutive bases</i> |
| 16:30 – 17:00 | Patricia Pascual-Ortigosa (Universidad de La Rioja)
<i>Polarización y depolarización de complejos simpliciales</i> |
| 17:00 – 17:30 | Laura González (Universitat Politècnica de Catalunya)
<i>Problemas abiertos en torno a los ideales primos de Moh</i> |
| 18:00 – 18:30 | Jose Brox (Instituto de Matemáticas de la Universidad de Valladolid, IMUVa)
<i>Making 22 million proofs: the Equational Theories Project</i> |
| 18:30 – 19:00 | Javier Rández-Ibáñez (Universidad de La Rioja)
<i>Aplicaciones adjuntas asociadas a formas bilineales</i> |

VIERNES, 23 de enero

- | | |
|---------------|---|
| 11:00 – 11:30 | Ujué Etayo (CUNEF Universidad)
<i>Study of the Condition Number through Minimal Energies</i> |
| 11:30 – 12:00 | Adrián Fidalgo-Díaz (Universidad de Valladolid)
<i>Computing the Clifford defect for some numerical semigroups</i> |
| 12:00 – 12:30 | Ignacio García-Marco (Universidad de La Laguna e IMAULL)
<i>Coloring minimal Cayley graphs</i> |

New biomedical applications of topological data analysis

Ana Romero, Jose Divasón, Eduardo Sáenz de Cabezón

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

ana.romero@unirioja.es

Topological data analysis (TDA) is a powerful tool for understanding the structure and topology of data, being persistent homology [3] and zigzag persistence [1] some of its most popular methods.

In a previous work [2], we explored the use of zigzag persistence for digital image processing and we developed a new software for computing the relationships between homology classes of a sequence of binary images via zigzag persistence. Moreover, we demonstrated its effectiveness by applying our programs to a real-world biological problem of analyzing honey bee sperm videos.

Now, we try to apply our zigzag persistence algorithms and other TDA tools to other biomedical problems, considering in particular diabetic retinopathy, a diabetes-related eye condition that affects the blood vessels in the retina. In a recently started collaboration with the group leaded by Dr. José María Sabater (University Miguel Hernández of Elche), we aim to apply TDA to enhance early detection of this illness by identifying complex vascular patterns and subtle functional changes in the retina before symptoms become apparent and predict disease progression.

References

- [1] G. Carlsson and V. de Silva (2010). Zigzag persistence. *Foundations of Computational Mathematics*, 10(4):367–405.
- [2] J. Divasón, A. Romero, P. Santolaria, and J. Yániz (2024). Zigzag persistence for image processing: New software and applications. *Pattern Recognit. Lett.*, 184:111–118.
- [3] A. Zomorodian and G. Carlsson (2005). Computing Persistent Homology. *Discrete and Computational Geometry* 33: 249–274, 2005.

Agradecimientos. Parcialmente financiado por proyectos Inicia 2023/02 y Afianza 2024/03 financiados por la Comunidad Autónoma de La Rioja y PID2024-157733NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Estadística Algebraica en OSCAR

Marina Garrote-López, Tobias Boege, Antony Della Vecchia, Ben Hollering

Department of Mathematics, KTH Royal Institute of Technology

marinagl@kth.se

En esta charla introduciremos un nuevo módulo de *Estadística Algebraica* desarrollado para el sistema de álgebra computacional de código abierto OSCAR, que integra herramientas como Singular y Polymake, y está basado en el lenguaje Julia. Nuestro módulo proporciona herramientas para trabajar con modelos clásicos de estadística algebraica, un área que combina métodos del álgebra, la geometría y la combinatoria para abordar problemas estadísticos.

Nos enfocamos en modelos estadísticos paramétricos definidos por funciones racionales en sus parámetros, lo que permite interpretarlos como variedades algebraicas. En particular, consideramos modelos gráficos gaussianos y discretos (dirigidos y no dirigidos), modelos de sustitución de nucleótidos en árboles y redes filogenéticas, y modelos de independencia condicional.

Todos estos pueden describirse como modelos gráficos, es decir, modelos paramétricos M_G asociados a un grafo G , donde $M_G = \text{Im}(\phi_G)$ y ϕ_G es una aplicación racional. En la charla explicaremos los principales objetivos del módulo y sus funcionalidades más relevantes—como la construcción y manipulación de las parametrizaciones ϕ_G , el cálculo de un conjunto generador del núcleo de ϕ_G o la construcción de ideales críticos asociados a problemas de optimización—y los aspectos metodológicos detrás de estos cálculos.

Referencias

- [1] W. Decker, C. Eder, C. Fieker, M. Horn, M. Joswig, eds. (2025) *The Computer Algebra System OSCAR: Algorithms and Examples, Algorithms and Computation in Mathematics*, Springer.
- [2] S. Sullivant (2018) *Algebraic Statistics*, Volume 194 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society.

Discriminants à la Sturm for families of affine sections of positive toric varieties

Alexandru Iosif

Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de los Materiales y Tecnología Electrónica,
Universidad Rey Juan Carlos

alexandru.iosif@urjc.es

We present a simple way of computing a discriminant for a family of positive zero-dimensional varieties by means of Sturm sequences. While this idea is not new and Sturm sequences can be highly inefficient, we show that, in the case of families of affine sections of positive toric varieties, computations are tractable, by providing computations for discriminants of dynamical systems originating in Biochemistry. We then compare this method with other existing methods.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por Deutsche Forschungsgemeinschaft, 284057449, y por Deutsche Forschungsgemeinschaft, 314838170 GRK 2297 MathCoRe.

A combinatorial description of when a self-dual set of points fails to be arithmetically Gorenstein

Gonzalo Rodríguez-Pajares, Diego Ruano, Flavio Salizzoni

IMUVa-Mathematics Research Institute, Universidad de Valladolid, Spain

gonzalo.rodriguez.pajares@uva.es

Let $\mathcal{C}$ be an $\mathbb{F}_q$ -linear code of dimension k in $\mathbb{F}_q^n$. Given a generator matrix $G \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$ of the code $\mathcal{C}$, we can associate $\mathcal{C}$ with the projective set $\Pi_G \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{F}_q)$ whose points correspond to the columns of G , up to multiplicity. The question of whether, for a given self-dual code over $\mathbb{F}_q^{2k}$, the associated set Π_G is arithmetically Gorenstein was posed in [2], building on a result from [1]. We provide a combinatorial answer in terms of the number of connected components of a graph derived from a zero–one symmetrization of the generator matrix.

Keywords: Self-dual codes; Arithmetically Gorenstein; Schur product; Connected component of a graph.

References

- [1] D. Eisenbud, S. Popescu (2000). The projective geometry of the Gale transform. *J. Algebra.*, 230, 1, 127–173.
- [2] Ş. O. Tohăneanu (2024) *Commutative algebra methods for coding theory*. De Gruyter Studies in Mathematics, 97.

Acknowledgments. This work was supported in part by Grant PID2022-138906NB-C21 funded by MICIU/AEI/10.13039/501100011033 and by ERDF/EU. G. R.-P. is supported by Grant CONTPR-2024-484 funded by Universidad de Valladolid and Banco Santander. F. S. is supported by the P500PT-222344 SNSF project.

On the shadow of Betti diagrams of edge ideals

Sara Asensio, Ignacio García-Marco, Philippe Gimenez

Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, Universidad de Valladolid e IMUVa

sara.asensio@uva.es

Given an arbitrary field k and a graph G with vertex set $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ and edge set $E(G)$, it is possible to define the edge ideal $I(G)$ associated to G in the polynomial ring $R = k[x_1, \dots, x_n]$ as $I(G) = \langle x_i x_j \mid \{x_i, x_j\} \in E(G) \rangle$.

These ideals were first defined in 1990 by R. H. Villarreal [5], establishing a strong connection between commutative algebra and graph theory. Since then, several authors began to study them by taking advantage of the combinatorial properties of G and other graphs associated to $I(G)$.

In 1990, R. Fröberg [4] proved the first very relevant result in this direction: $I(G)$ has a linear resolution, meaning that its Betti diagram has only one row, if and only if the complement G^c of G has no induced cycles of length at least 4. This result was later improved by D. Eisenbud, M. Green, K. Hulek and S. Popescu [1], who determined the step at which the resolution of $I(G)$ stops being linear in terms of the minimum length of a cycle in G^c .

In 2009 and 2014, Ó. Fernández-Ramos and P. Gimenez [2, 3] computed the first nonzero entry of the second row of the Betti diagram of every edge ideal whose resolution is not linear, characterized the edge ideals associated to bipartite graphs with regularity 3 in terms of combinatorial properties of the bipartite complement G^{bc} of G , and computed the first nonzero entry of the third row of the Betti diagram of the edge ideals associated to bipartite graphs when it exists.

In this talk, we will give a review of the state of the art in the study of Betti diagrams of edge ideals associated to graphs, paying special attention to the combination of homological and combinatorial tools that has played an important role in this story. In addition, we will discuss new results related to the application of homological techniques to edge ideals of families of graphs with certain characteristics.

References

- [1] D. Eisenbud, M. Green, K. Hulek, S. Popescu (2004). Restricting linear syzygies: algebra and geometry. *Compos. Math.*, 141, 1460–1478.
- [2] Ó. Fernández-Ramos, P. Gimenez (2009). First nonlinear syzygies of ideals associated to graphs. *Comm. Algebra*, 37, 1921–1933.
- [3] Ó. Fernández-Ramos, P. Gimenez (2014). Regularity 3 in edge ideals associated to bipartite graphs. *J. Algebraic Combin.*, 39, 919–937.
- [4] R. Fröberg (1990). On Stanley-Reisner rings. *Banach Center Publ.*, 26, 57–70.
- [5] R. H. Villarreal (1990). Cohen-Macaulay graphs. *Manuscripta Math.*, 66, 277–293.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por el proyecto PID2022-137283NB-C22, financiado a su vez por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por ERDF/EU. La ponente agradece también el apoyo económico del Fondo Social Europeo, el Programa Operativo de Castilla y León, y la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León.

Cellular free resolutions induced by involutive bases

Rodrigo Iglesias, Eduardo Sáenz-De-Cabezón

Departamento de Matemáticas y Computación , Universidad de La Rioja

roiglesi@unirioja.es

Involutive divisions assign sets of *multiplicative/non-multiplicative variables* to each term of a set in the polynomial ring in n variables. These assignments give rise to involutive bases, which are a type of Gröbner basis with additional combinatorial properties. Some of these involutive divisions, in particular the so-called Janet and Pommaret divisions, have particularly interesting algebraic properties and are efficient tools for computing homological invariants of the ideal. In this talk, we explore on which monomial ideal these involutive bases behave particularly well, enabling the construction of cellular free resolutions. Furthermore, based on these constructions induced from involutive bases, we are able to provide explicit descriptions of the minimal free resolutions for certain classes of monomial ideals.

Agradecimientos. Parcialmente financiado por proyecto PID2024-157733NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Polarización y depolarización de complejos simpliciales

Patricia Pascual-Ortigosa, Víctor M. López-Antón, Pablo Munarriz-Senosiain, Eduardo Sáenz-de-Cabezón

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

patricia.pascualo@unirioja.es

El objetivo de esta charla es mostrar la relación que existe entre un complejo simplicial de Koszul de un ideal monomial y el de su polarizado.

La operación polarización transforma un ideal monomial arbitrario en un ideal monomial libre de cuadrados. Gracias a esta operación nos restringimos a que los exponentes de los monomios sean 0 o 1, sin embargo, vamos a tener que trabajar en un anillo de polinomios con más variables. Por otro lado, la operación depolarización transforma un ideal monomial libre de cuadrados en un ideal monomial con exponentes (ver [1] para más información). Estas dos operaciones conservan, entre otros invariantes, los números de Betti y, por tanto, la homología de sus complejos simpliciales asociados (ver, por ejemplo, [2]).

En esta charla, proponemos reducir un complejo simplicial a uno más pequeño con la misma homología empleando la operación depolarización. De esta forma, este proceso puede utilizarse como un paso previo en un algoritmo para calcular la homología simplicial.

Para terminar, mostraremos algunos experimentos realizados con ordenador para ilustrar la eficiencia de esta propuesta.

Referencias

- [1] F. Mohammadi, P. Pascual-Ortigosa, E. Sáenz-de-Cabezón, H. P. Wynn (2020). Polarization and depolarization of monomial ideals with application to multi-state system reliability, *Journal of Algebraic Combinatorics*, Springer, nº. 4, vol. 51, 617–639.
- [2] J. Herzog, T. Hibi (2011) *Monomial ideals*. Springer.

Agradecimientos. Parcialmente financiado por proyecto PID2024-157733NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Problemas abiertos en torno a los ideales primos de Moh

Laura González, Francesc Planas-Vilanova

Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya

laura.gonzalez.hernandez@upc.edu

Sea K un cuerpo y sea $P_n = \ker \rho_n$ el núcleo del morfismo de K -álgebras $\rho_n : K[[x, y, z]] \rightarrow K[[t]]$, definido por $\rho_n(x) = t^{nm} + t^{nm+\lambda}$, $\rho_n(y) = t^{(n+1)m}$ y $\rho_n(z) = t^{(n+2)m}$, donde n es un entero impar positivo, $m = (n+1)/2$ y λ es un entero mayor que $n(n+1)m$ y coprimo con m (ver [4]). Moh demuestra que, cuando la característica de K es cero, el mínimo número de generadores de P_n es $n+1$. Es decir, el mínimo número de generadores de la familia de ideales primos P_n no está acotado.

En esta charla trataremos algunas cuestiones abiertas relacionadas con los ideales primos de Moh, entre ellas la posibilidad de eliminar la restricción sobre la característica de K , así como eliminar la hipótesis de n impar. También hablaremos sobre cómo encontrar explícitamente los generadores de una familia de ideales primos cuyo mínimo número de generadores no esté acotado. En esta línea véanse, por ejemplo, los trabajos [1, 2, 3].

Referencias

- [1] L. González, F. Planas-Vilanova, Prime ideals of Moh and the characteristic of the field (2024). [arXiv:2407.21692](https://arxiv.org/abs/2407.21692) arXiv:2407.21692.
- [2] J. Maurer, Eine Variante der Moh-Kurven (1980). Preprint.
- [3] R. Mehta, J. Saha, I. Sengupta (2021). Moh's example of algebroid space curves. *J. Symbolic Comput.* 104, 168–182.
- [4] T.T. Moh (1974). On the unboundedness of generators of prime ideals in power series rings of three variables. *J. Math. Soc. Japan* 26, 722–734.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por PID2019-103849GB-I00 y PID2023-146936NB-I00.

Making 22 million proofs: the Equational Theories Project

Brox, Tao, Bolan, et al.

Instituto de Matemáticas de la Universidad de Valladolid (IMUVA)

josebrox@uva.es

Recently, Terence Tao launched and led the Equational Theories Project [1], an online collaborative pilot project to explore new ways to collaborate in mathematics with machine assistance. The project successfully determined all 22 million edges of the implication graph between the 4694 simplest equational laws on magmas, by a combination of human-generated and automated proofs, all validated by the formal proof assistant language Lean. As a collaborator of this project, in this talk I will quickly address its two main aspects: the problem we have tackled together with the tools we have used, and how this international, online collaboration has been successfully organized and carried out.

References

- [1] The Equational Theories Project (2024-25). Mapping out the relations between different equational theories of magmas. https://teorth.github.io/equational_theories/
- [2] M. Bolan et al. (2025). The Equational Theories Project: advancing collaborative mathematical research at scale. Preprint. https://teorth.github.io/equational_theories/paper.pdf

Acknowledgments. The author is supported by a postdoctoral fellowship “Convocatoria 2021” funded by Universidad de Valladolid, and partially supported by grant PID2022-137283NB-C22 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and ERDF/EU.

Aplicaciones adjuntas asociadas a formas bilineales

Javier Rández-Ibáñez

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

jarandez@unirioja.es

Dada una forma bilineal φ simétrica o antisimétrica y no degenerada sobre V , un espacio vectorial de dimensión finita, y una aplicación lineal $f: V \rightarrow V$, existe una única aplicación lineal f^* , llamada aplicación adjunta, definida por la siguiente relación

$$\varphi(f(x), y) = \varphi(x, f^*(y)).$$

Cuando $f^* = f^{-1}$, la aplicación se llama isometría y la estructura de estas aplicaciones ha sido ampliamente estudiada en [1]. Cuando $f^* = -f$, la aplicación se dice antiadjunta, y su estructura también ha sido descrita en [2]. Estos dos tipos de aplicaciones presentan ciertos patrones comunes que sugieren la posibilidad de establecer un tratamiento simultáneo y más general de sus formas canónicas y la forma bilineal que las define.

En esta charla exploraremos un enfoque más genérico de aplicaciones que cumplen que $f^* \in \mathbb{K}[f]$ y discutiremos cómo describir su estructura.

Referencias

- [1] Milnor, J. (1969). On isometries of inner product spaces. *Inventiones mathematicae*, 8(2), 83–97.
- [2] Benito, P., Rández-Ibáñez, J., Roldán-López, J (2024). Skew-adjoint maps and quadratic Lie algebras. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 21(3), 115.

Study of the Condition Number through Minimal Energies

Ujué Etayo

Departamento de matemáticas, CUNEF Universidad

ujue.etayo@cunef.edu

Given a univariate polynomial with complex coefficients, the condition number of the polynomial at one of its roots quantifies how the root changes under slight perturbations of the polynomial's coefficients. This number may range from 1 (the root remains unchanged) to ∞ (the root is multiple). In this talk, we present a connection between polynomials with very small condition numbers and points that minimise the logarithmic potential defined on the 2-dimensional sphere.

Agradecimientos. Proyecto PID2020-113887GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por la starting grant de la FBBVA asociada al premio José Luis Rubio de Francia.

Computing the Clifford defect for some numerical semigroups

Adrián Fidalgo-Díaz, Eduardo Camps-Moreno, Umberto Martínez-Peñas, Gretchen Matthews

Departamento de Álgebra, Universidad de Valladolid

adrian.fidalgo22@uva.es

One-point algebraic-geometry codes are a family of codes defined by fixing a non-singular algebraic curve and evaluating certain algebraic functions whose pole set is restricted to a single point P . The parameters of these codes can be determined or bounded using invariants of the curve. For instance, the set of admissible pole orders at P , known as the Weierstrass semigroup, provides useful information. Regarding decoding, the so-called “Modified Algorithm” introduced in [1] allows decoding up to half the designed minimum distance minus a defect that depends on the Weierstrass semigroup. The authors independently described this defect in the context of applying algebraic-geometry codes to distributed matrix multiplication [2].

In this work, we compute the decoding defect for some families of semigroups arising from curves commonly used in coding theory. Notably, we compute the defect for the Suzuki curve, the Norm-Trace curve and present results for the Pedersen–Sørensen curve, partially answering one of the questions posed in [3].

References

- [1] Skorobogatov, A. N., & Vladut, S. G. (1990). On the decoding of algebraic-geometric codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 36(5), 1051-1060.
- [2] Fidalgo-Díaz, A., & Martínez-Peñas, U. (2024). Distributed matrix multiplication with straggler tolerance using algebraic function fields. *IEEE Transactions on Information Theory*.
- [3] Kirfel, C. (1993). On the Clifford defect for special curves. In *Proceedings of AGCT-4, Luminy*.

Coloring minimal Cayley graphs

Ignacio García-Marco, Kolja Knauer

Departamento de Matemáticas, Estadística e I.O., Universidad de La Laguna e IMAULL

iggarcia@ull.edu.es

For a finite group $(G, \cdot)$ and a set of generators C of G , the Cayley graph of G with respect to C has the elements of G as vertices and edges $\{g, g \cdot c\}$ where $g \in G$ and $c \in C$. Cayley graphs are central objects in combinatorial and computational group theory.

In 1978, Babai [1] raised the question whether all Cayley graphs of groups with respect to a minimal set of generators have bounded chromatic number; in 1994 he conjectured a negative answer. In this talk we show that any minimal Cayley graph of a (generalized) dihedral or nilpotent group has chromatic number at most 3. On the contrary, we exhibit soluble groups with chromatic number at least 4. On the other hand we address a related question proposed by Babai in 1978 by constructing graphs of unbounded chromatic number that admit a proper edge coloring such that each cycle has some color at least twice. The latter can be viewed as a step towards confirming Babai's 1994 conjecture – a problem that remains open.

The results in this talk are included in [2].

References

- [1] L. Babai (1978). Chromatic number and subgraphs of Cayley graphs. *Theor. Appl. Graphs*, Proc. Kalamazoo 1976, Lect. Notes Math. 642, 10-22.
- [2] I. García-Marco, K. Knauer (2025). Coloring minimal Cayley graphs. *Eur. J. Combin.* 125, 104108.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por el proyecto PID2022-137283NB-C22 concedido por el MICIU/AEI/ 10.13039/501100011033.

Sesión especial 3

Álgebras no Asociativas

Equipo organizador:

- *Alejandra Sarina Córdova Martínez* (Universidad de Málaga)
- *Irene Paniello Alastruey* (Universidad de Zaragoza)

Descripción

Las álgebras no asociativas incluyen a las álgebras de Lie, las álgebras de Jordan y a las álgebras genéticas, entre otras muchas. Todas estas estructuras son muy importantes por sus aplicaciones en física, geometría y teoría de operadores. En esta sesión se incluyen charlas muy variadas, y que abarcan las distintas familias de álgebras mencionadas anteriormente. El objetivo de esta sesión es dar a conocer los avances más recientes en este campo, sus aplicaciones y fomentar futuras colaboraciones.

Palabras clave: Álgebras no asociativas; Lie; Jordan; álgebras genéticas.

Programa

LUNES, 19 de enero

- 15:30 – 16:00 Francisco de Paula Cuenca Carrégalo (Universidad de Málaga)
Álgebras grupo generalizadas
- 16:00 – 16:30 Yolanda Cabrera Casado (Universidad de Málaga)
Space of derivations in some evolution algebras
- 16:30 – 17:00 Irene Paniello (Universidad de Zaragoza)
Skewed comultiplications in genetic coalgebras
- 17:00 – 17:30 Andrés Pérez Rodríguez (Universidade de Santiago de Compostela)
Deformando álgebras de evolución

MARTES, 20 de enero

- 11:00 – 11:30 Esther García González (Universidad Rey Juan Carlos)
Álgebras de Leibniz y estructuras Jordan relacionadas
- 11:30 – 12:00 Alberto Daza García (Universidad de Sevilla)
Esquemas de automorfismos de pares de Jordan de tipo I y IV
- 12:00 – 12:30 Alejandra S. Córdova Martínez (Universidad de Málaga)
Automorphism group schemes of Kantor pairs of associative central simple structurable algebras
- 15:30 – 16:00 Xabier García Martínez (Universidad de Santiago de Compostela)
The invariant ring of pairs of matrices
- 16:00 – 16:30 Rosa María Navarro (Universidad de Extremadura)
Solvable compatible Lie algebras with a given nilradical
- 16:30 – 17:00 Cristina Draper (Universidad de Málaga)
Contracciones graduadas de álgebras de Lie de tipo E
- 17:00 – 17:30 Pilar Benito (Universidad de La Rioja)
Álgebras de Lie cuadráticas: desde las nilpotentes a las mixtas
- 18:00 – 18:30 Antonio Jesús Calderón (Universidad de Cádiz)
Sobre la estructura de las álgebras con bases multiplicativas
- 18:30 – 19:00 Alicia Tocino (Universidad de Málaga)
Connecting (maximal) ideals in evolution algebras with (maximal) hereditary subsets of its associated graph

Álgebras grupo generalizadas

Francisco de Paula Cuenca Carrégalo, Cristina Draper Fontanals

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga

fcuenca@uma.es

Un álgebra grupo generalizada es una estructura algebraica que generaliza todas las álgebra grupo torcido $\mathbb{F}^\sigma[G]$, donde $\mathbb{F}$ es un cuerpo, G un grupo y $\sigma: G \times G \rightarrow \mathbb{F}$ es una aplicación. Por tanto, este concepto engloba importantes ejemplos de álgebras como las álgebras grupo, álgebras octoniónicas, álgebras de Clifford o el álgebra de Albert. Esta generalización se consigue reemplazando el cuerpo base por un espacio vectorial. Entre los primeros ejemplos de álgebras grupo generalizadas nos encontramos álgebras de Lie de tipo G_2 , B_3 , D_4 y F_4 utilizando como grupo graduador $\mathbb{Z}_2^3$ ([3, 1, 2]). A priori, esta nueva noción no parece tener propiedades interesantes, sin embargo resulta dar un enfoque en el cual conceptos como las representaciones, la trialdad, etc. se vuelven más fáciles de entender. Especialmente, la búsqueda de bases ortogonales compuestas de elementos semisimples se vuelve más sencilla. Una de las propiedades más interesantes de esta estructura es que la propia definición está centrada en el grupo, lo que permite “variar” de forma sencilla la multiplicación de elementos dependiendo de sus grados, haciendo esto que sea un objeto idóneo para aplicar, por ejemplo, contracciones graduadas.

Referencias

- [1] F. Cuenca, C. Draper (2025). New Lie algebras over $\mathbb{Z}_2^3$. *arXiv preprint arXiv:2501.02492*.
- [2] F. Cuenca, C. Draper (2025). Real forms of type F_4 as generalized group algebra over the group $\mathbb{Z}_2^3$ [Manuscript in preparation].
- [3] C. Draper (2024). The compact exceptional Lie algebra $\mathfrak{g}_2^\mathbb{C}$ as a twisted group algebra, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 152(09), 3679-3688.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Cristina Draper Fontanals. Proyecto parcialmente financiado por PID2023-152673GB-I00.

Space of derivations in some evolution algebras

Yolanda Cabrera Casado, Paula Cadavid, Tiago Reis, Mary Luz Rodiño Montoya, Pablo M. Rodríguez

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Málaga

yolandacc@uma.es

We study the space of derivations for some finite-dimensional evolution algebras depending on an associated directed graph. Our results suggest how strongly the associated graph's structure impacts in the characterization of derivations for a given evolution algebra. We also advance in describing the derivations for n-dimensional Volterra evolution algebras.

References

- [1] Alsarayreh A., Qaralleh I., Ahmmad M. Z. (2017) Derivation of three dimensional evolution algebras. *JP J. Algebra Number Theory Appl.*, No. 39(4):425-444.
- [2] Cabrera Casado Y., Cadavid P., Rodiño Montoya M. L., Rodríguez P.M. (2021). On the characterization of the space of derivations in evolution algebras. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. (1923 -) 200:737–755.
- [3] Cabrera Casado, Y., Cadavid, P., Reis, T. (2023). Derivations and loops of some evolution algebras. *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat.* 117, 119.
- [4] Cadavid P., Rodiño Montoya M. L. and Rodríguez P. M. (2020). Characterization theorems for the space of derivations of evolution algebras associated to graphs. *Linear Multilinear Algebra*. 68 n.7: 1340-1354.
- [5] Camacho L. M., Gómez J. R., Omirov B. A., Turdibaev R. M. (2013). The derivations of some evolution algebras. *Linear Multilinear Algebra*. 61:309-322.
- [6] Cardoso M.I., Gonçalves D., Martín D., Martín C., Siles Molina M. (2021). Squares and associative representations of two dimensional evolution algebras. *J. of Algebra and Its Appl.* 20; 06: 2150090.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Paula Cadavid, Tiago Reis, Mary Luz Rodiño Montoya y Pablo M. Rodríguez.

Skewed comultiplications in genetic coalgebras

Irene Paniello

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

ipaniello@unizar.es

After reviewing the classical notion of isotopy in the setting of nonassociative algebras, we will discuss different ways of translating this notion to noncoassociative coalgebras arising when studying genetic processes. To do this, we will consider genetic coalgebras whose comultiplications, equivalently, their associated cubic stochastic matrices, are skewed by the simultaneous action of three square stochastic matrices.

Acknowledgments. Partially supported by grant PID2021-123461NB-C21, funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by “ERDF A way of making Europe” and grant E22-23 Álgebra y Geometría, Gobierno de Aragón.

Deformando álgebras de evolución

Andrés Pérez-Rodríguez, Abdenacer Makhlouf

Departamento de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela

andresperez.rodriguez@usc.es

Las *deformaciones* fueron introducidas por Gerstenhaber en [1] para álgebras asociativas, y más adelante generalizadas a otras estructuras algebraicas, principalmente álgebras de Lie, por Nijenhuis y Richardson en [2]. De manera informal, una deformación de una estructura algebraica $\mathcal{A}$ con producto μ consiste en construir un nuevo producto μ_t sobre el espacio de series formales $\mathcal{A}[[t]]$ de la forma

$$\mu_t = \mu + \sum_{i \geq 1} \mu_i t^i,$$

donde cada μ_i es una aplicación bilineal en $\mathcal{A}$. El objetivo de la teoría de deformaciones es estudiar cómo estas nuevas multiplicaciones, *a priori* más complejas, enriquecen o modifican la estructura original.

El principal objetivo de esta charla es explorar las deformaciones en el contexto de *álgebras de evolución*, estructuras conmutativas pero no asociativas introducidas por Tian y Vojtěchovský en [3] en el año 2006. No obstante, si el tiempo lo permite, también comentaremos algunos resultados sobre *degeneraciones* en este tipo de álgebras, proceso que, al contrario que las deformaciones, tiende a simplificar la estructura algebraica, haciéndola a menudo más abeliana.

Referencias

- [1] M. Gerstenhaber (1964). On the deformation of rings and algebras. *Ann. of Math.*, 79, 59–103.
- [2] A. Nijenhuis, R. W. Richardson, Jr. (1967). Deformations of Lie algebra structures. *J. Math. Mech.*, 17, 89–105.
- [3] J. P. Tian, P. Vojtěchovský (2006). Mathematical concepts of evolution algebras in non-Mendelian genetics. *Quasigroups Related Systems*, 14, 111–122.

Agradecimientos. El ponente ha sido parcialmente financiado por la Agencia Estatal de Investigación (España), mediante el proyecto PID2020-115155GB-I00 (incluyendo fondos europeos FEDER), por la Xunta de Galicia a través del programa de Grupos de Referencia Competitiva (GRC), subvención ED431C 2023/31, así como por el contrato predoctoral FPU21/05685 y la ayuda para estancias breves EST25/00293, ambas del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades (España). Esta investigación es el resultado de una estancia de Andrés Pérez-Rodríguez en Mulhouse (Francia). El ponente agradece sinceramente al Département de Mathématiques, IRIMAS, Université de Haute-Alsace por su cálida acogida y hospitalidad.

Álgebras de Leibniz y estructuras Jordan relacionadas

E. García

Departamento Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de Materiales y Tecnología
Electrónica,
Universidad Rey Juan Carlos

esther.garcia@urjc.es

En este trabajo introducimos la noción de dipar de Jordan, y comprobamos que coincide con la estructura algebraica formada los extremos de una álgebra de Leibniz con una $\mathbb{Z}$ -graduación finita. Recíprocamente, damos una construcción de tipo Tits-Kantor-Koecher (TKK) para obtener un álgebra de Leibniz 3-graduada a partir de cualquier dipar de Jordan, extendiendo la construcción TKK realizada por Gubarev y Kolesnikov para diálgebras de Jordan. Definimos también homótopas de dipares de Jordan en elementos y, gracias a la construcción TKK, probamos que las homótopas de los dipares de Jordan en elementos son diálgebras de Jordan.

Referencias

- [1] E. García, M. Gómez Lozano, R. Muñoz Alcázar, G. Vera de Salas. Leibniz algebras and their connection to Jordan pair disystems. *Preprint*.

Esquemas de automorfismos de pares de Jordan de tipo I y IV

Alberto Daza-Garcia, Diego Aranda Orna

Departamento de matemáticas aplicadas I, Universidad de Sevilla

adaza1@us.es

Los pares de Jordan son la estructura no asociativa que coordinatizan las álgebras 3-graduadas. Los pares de Jordan simples están clasificados en seis clases: cuatro especiales y dos excepcionales. En esta charla nos centramos en la clase de pares asociados matrices rectangulares (tipo I) y la clase de pares asociados a formas bilineales no degeneradas (tipo IV). El objetivo de la charla es calcular los esquemas de automorfismos de estos pares así como los de algunos triples de Jordan asociados.

Referencias

- [1] D. Aranda-Orna, A. Daza-Garcia (2024). Automorphism group schemes of special simple Jordan pairs of types I and IV. *J. Algebra*, 679, 67–85.

Agradecimientos. Trabajo financiado por la beca PID2021-123461NB-C21, financiada por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por ERDF “A way of making Europe”.

Automorphism group schemes of Kantor pairs of associative central simple structurable algebras

Alejandra S. Córdova-Martínez, Diego Aranda-Orna, Alberto Daza-García

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Málaga

acordova@uma.es

Let $(\mathcal{A}, -)$ an associative algebra with involution which is central simple as an algebra with involution and the base field is algebraically closed with $\text{char} \mathbb{F} \neq 2$, then there are three possible cases up to isomorphism for such algebras. We have the orthogonal case, the symplectic case and unitary case.

In this talk we will define the three cases and we are going to find the associated Jordan pair of each algebra. We will remember the relation between associative algebras (which is a particular case of structurable algebras) and Jordan pairs using the TKK construction. Finally we are going to find the automorphism group schemes of the associated Kantor pairs of the algebras for each of the three cases.

References

- [1] B.N. Allison, *A class of nonassociative algebras with involution containing the class of Jordan algebras*, Math. Ann. 237 (1978), 133–156.
- [2] A. Elduque and M. Kochetov, *Gradings on simple Lie algebras*, Mathematical Surveys and Monographs 189, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.
- [3] M.A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost and J.P. Tignol, *The Book of Involutions*, Colloquium Publications 44., American Mathematical Society, 1998.

The invariant ring of pairs of matrices

Xabier García Martínez

Departamento de Matemáticas, CITMAga & Universidade de Santiago de Compostela

xabier.garcia@usc.gal

Let us consider the action of the general linear group $GL_n(\mathbb{C})$ on the direct product $\mathcal{M}_n^d$ of d copies of $\mathcal{M}_n$ by simultaneous conjugation sending $(X_1, \dots, X_d)$ to $(gX_1g^{-1}, \dots, gX_dg^{-1})$ for any $g \in GL_n(\mathbb{C})$. This induces an action of $GL_n(\mathbb{C})$ on the algebra $\mathbb{C}[\mathcal{M}_n^d]$ of polynomial functions on $\mathcal{M}_n^d$. The algebra of invariants under this action, $\mathbb{C}[\mathcal{M}_n^d]^{GL_n}$, is an important object in several areas of mathematics.

In this talk we will explain how we used methods coming from non-associative algebras to obtain the full description of the case $\mathbb{C}[\mathcal{M}_4^2]^{GL_4}$, which could not be solved using the standard representation theory methods. Moreover, we will talk about its connection with the Calogero-Moser spaces and the Hilbert scheme of points.

References

- [1] F. Eshmatov, X. García-Martínez and R. Turdibaev (2025). Noncommutative Poisson structure and invariants of matrices. *Advances in Mathematics*, 469, 110212.
- [2] F. Eshmatov, X. García-Martínez, T. Normatov and R. Turdibaev (2025). On the coordinate rings of Calogero-Moser spaces and the invariant commuting variety of a pair of matrices. *Results in Mathematics*, 80, Article 68.
- [3] X. García-Martínez, T. Normatov and R. Turdibaev (2022). The ring of invariants of pairs of 3×3 matrices. *Journal of Algebra*, 603(1), 201–212.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Farkhod Eshmatov, Rustam Turdibaev. Proyecto parcialmente financiado por PID2021-127075NA-I00.

Solvable compatible Lie algebras with a given nilradical

R.M. Navarro, A. Fernández Ouaridi, B.A. Omirov, G.O. Solijanova

Departamento de Matemáticas, Área Matemática Aplicada, Universidad de Extremadura

rnavarro@unex.es

Throughout this work we show that under certain conditions the method for describing solvable Lie algebras with given nilradical by means of non-nilpotent outer derivations of the nilradical is also applicable to the case compatible Lie algebras

Agradecimientos. Este trabajo ha sido cofinanciado por la Unión Europea, el Fondo Europeo de Desarrollo Regional y la Junta de Extremadura, la Autoridad de Gestión y el Ministerio de Hacienda, a través del proyecto GR24068.

Contracciones graduadas de álgebras de Lie de tipo E

Cristina Draper, Francisco Cuenca, Thomas Meyer

Departamento Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga

cdf@uma.es

Las contracciones de álgebras de Lie tienen su origen en la física teórica, donde fueron introducidas en los años 50 por Segal, e independientemente por İnönü y Wigner, para describir límites entre teorías simétricas, como por ejemplo la transición del grupo de Poincaré al grupo de Galilei en el límite no relativista. A partir de los años 90, este proceso se reinterpreta en el ámbito algebraico como una deformación estructural del corchete de Lie mediante transformaciones lineales degeneradas. Las contracciones graduadas surgen como una generalización natural de esta idea en el contexto de álgebras G -graduadas, siendo la idea principal que durante el proceso de contracción todas las álgebras obtenidas continúen siendo G -graduadas, simplemente cambiando las constantes de estructura de modo uniforme al multiplicar componentes homogéneas fijas. Este concepto permite explorar relaciones estructurales entre clases no isomorfas pero graduadas por el mismo grupo. En nuestra línea de trabajo ([1, 2]) fijamos la graduación Γ y obtenemos todas las clases tanto de isomorfía como de isomorfía graduada de las álgebras graduadas que pueden obtenerse a partir de Γ mediante contracciones graduadas. Se pueden encontrar trabajos análogos tanto sobre álgebras (de Lie graduadas) simples, por ejemplo $\mathfrak{sl}_3$ o $\mathfrak{so}_5$, como sobre álgebras nilpotentes de dimensiones bajas, e incluso álgebras afines y superálgebras, aunque con menos resultados de clasificación. Además, al estudiar la serie de álgebras de Lie $\mathbb{Z}_2^3$ -graduadas $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{so}_7$ y $\mathfrak{so}_8$, todas ellas con graduaciones relacionadas con los octoniones, hemos dado un pequeño salto en cuanto a la dimensión del álgebra simple involucrada y de sus componentes homogéneas. Continuaremos esta línea de trabajo estudiando las contracciones graduadas de otra familia de $\mathbb{Z}_2^3$ -graduaciones en las álgebras de Lie excepcionales de tipo E . Esto requiere un esfuerzo combinatorio previo para clasificar ciertos subconjuntos de ejes del plano de Fano bajo la relación de colinealidad ([3]). Dicha clasificación nos proporcionará los posibles soportes, permitiendo obtener familias muy extensas de álgebras de Lie no isomorfas mediante contracción graduada de $\mathbb{Z}_2^3$ -graduaciones de álgebras de Lie excepcionales. Destacaríamos que ha sido posible estudiar las más de 800 álgebras obtenidas desde un punto de vista unificado y sorprendentemente sencillo, porque muchas de sus propiedades están determinadas por el soporte.

Referencias

- [1] C. Draper, T. Meyer and J. Sánchez Ortega (2023). Graded contractions of the fine $\mathbb{Z}_2^3$ -grading on $\mathfrak{g}_2$. *Journal of Algebra*, 658, pp. 592–643.
- [2] C. Draper, T. Meyer and J. Sánchez Ortega (2024). Graded contractions on the orthogonal Lie algebras of dimensions 7 and 8. *ArXiv preprint*, arXiv:2409.18069.
- [3] C. Draper, T. Meyer and J. Sánchez Ortega (2024). Generalised nice sets. *ArXiv preprint*, arXiv:2412.11287.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por PID2020-118452GB-I00 y PID2023-152673GB-I00.

Álgebras de Lie cuadráticas: de nilpotentes a mixtas

Pilar Benito

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

`pilar.benito@unirioja.es`

De acuerdo con [1], cada álgebra de Lie cuadrática no resoluble y no semisimple, en adelante *mixtas*, se puede construir como doble extensión de una resoluble cuadrática. Desde las propiedades y patrones estructurales de las álgebras cuadráticas, ver [2] y referencias incluidas, es posible diseñar técnicas de construcción alternativas a la doble extensión, que permiten obtener resolubles y mixtas cuadráticas con radical nilpotente. En esta charla exploraremos tales construcciones que pueden ser implementadas mediante algoritmos computacionales que hemos alojado en nuestro repositorio GitHub localizado en la url, <https://github.com/joroldan/MathematicaLieFunctions>. Los resultados aparecen en el preprint [3].

Referencias

- [1] M. Bordemann (1997): Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras. *Acta Math. Univ. Comenian.(NS)*, 66, vol. 2, 151–201.
- [2] J. Roldán-López (2023) *Quadratic Lie algebras: Algorithms and (de) constructions.*, PhD, Universidad de La Rioja.
- [3] P. Benito, J. Rández-Ibáñez: J. Roldán-López (2025): Computational algorithms from nilpotent to mixed quadratic Lie algebra. Preprint.

Agradecimientos. Los resultados de la charla son una colaboración conjunta de Jorge Roldán-López, Javier Rández-Ibáñez y el ponente. Este proyecto está parcialmente financiado por el Proyecto Nacional PID2021-123461NB-C21 y la Comunicad Autónoma de La Rioja (CAR), proyecto Fortalece 23/2023. Los tres coautores son investigadores en ambos proyectos. Javier Rández-Ibáñez es, además, alumno en formación predoctoral financiado por una beca FPI de la CAR-UR.

Sobre la estructura de las álgebras con bases multiplicativas

A.J. Calderon, S. Bouarroudj, R.M Navarro

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz

ajesus.calderon@uca.es

Sea el par $(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ donde $\mathfrak{A}$ es un álgebra arbitraria sobre un cuerpo base $\mathbb{F}$, y $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i \in I}$ es una base de $\mathfrak{A}$ satisfaciendo la siguiente propiedad: para todo $i, j \in I$ tenemos que $e_i e_j \in \mathbb{F} e_k$ para algún $k \in I$. Vamos a mostrar que $\mathfrak{A}$ descompone como $\mathfrak{A} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{d}$ donde $\mathfrak{s}$ es un ideal semisimple de $\mathfrak{A}$; y $\mathfrak{d}$ es la suma directa de ideales indescomponibles no-simples de $\mathfrak{A}$. Además, esta descomposición es única.

Referencias

- [1] T. P. Mathew, P. L. Polyakow, G. Russo, J. Wang (1998). Domain decomposition operator solittings for the solution of parabolic. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19, 912–932.
- [2] N. N. Yanenko (1971) *The method of fractional steps. The solution of problems of mathematical physics in several variables*. Springer.
- [3] G. A. Staff, E. M. Rønquist (2005). Stability of the Parareal Algorithm, en T. J. Barth et al., editores, *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, Lect. Notes Comput. Sci. Eng., vol. 40, Springer-Verlag, 449–456.

Connecting (maximal) ideals in evolution algebras with (maximal) hereditary subsets of its associated graph

Alicia Tocino, Yolanda Cabrera Casado, Dolores Martín Barquero, Cándido Martín González

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Málaga

`alicia.tocino@uma.es`

In this talk, we introduce a relation including ideals of an evolution algebra A and hereditary subsets of vertices of its associated graph and establish some properties among them. This relation allows us to determine maximal ideals and ideals having the absorption property of an evolution algebra in terms of its associated graph. In particular, the maximal ideals can be determined through maximal hereditary subsets of vertices except for those containing A^2 .

References

- [1] N. Boudi, Y. Cabrera Casado, M. Kanuni and M. Siles Molina. (2022). Natural families in evolution algebras. *Publicacions Matemàtiques*, 66 (1), 159–181.
- [2] Y. Cabrera Casado, M. Kanuni and M. Siles Molina. (2019). Basic ideals in evolution algebras. *Linear Algebra Appl.*, 570, 148–180.
- [3] A. Elduque, A. Labra (2015). Evolution algebras and graphs. *J. Algebra Appl.*, 14 (7).
- [4] A. Elduque, A. Labra (2015). Evolution algebras, automorphisms, and graphs. *Linear Multilinear Algebra*, 69 (2), 331–342.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Yolanda Cabrera Casado, Dolores Martín Barquero y Cándido Martín González. Proyecto parcialmente financiado por PID2019-104236GB-I00/AEI/10.13039/5011000110 (Ministerio de Ciencia e Innovación) y FQM-336 (Junta de Andalucía).

Sesión especial 4

Análisis Complejo y Teoría de Operadores

Equipo organizador:

- *Tanausú Aguilar Hernández* (Universidad de Málaga)
- *Adrián Llinares Romero* (Universidad Autónoma de Madrid)
- *Alejandro Mas Mas* (Universidad de Alicante)
- *Elena de la Rosa Pérez* (Universidad de Málaga)

Descripción

Tal y como su título indica, esta propuesta se enmarca dentro del Análisis Complejo y la Teoría de Operadores, disciplinas que ocupan sendos lugares relevantes dentro del Análisis Matemático y están estrechamente relacionadas con otras importantes como bien puedan ser el Análisis Armónico, la Geometría, las Ecuaciones en Derivadas Parciales o la Teoría de Números. El objetivo principal de la sesión es el de reunir a una selección de miembros de la Red *Análisis Matemático y Aplicaciones* (constituida en 2023 a partir de la unión de las redes temáticas *Análisis Funcional y Aplicaciones* y *Variable Compleja, espacios de funciones y operadores entre ellos*, ambas bien consolidadas) cuya investigación encaje en el área para así poder compartir ideas y promover la colaboración entre los diferentes nodos de la Red. Esta sesión se ha realizado en todos los Congresos Bienales de la RSME, a excepción de la edición de 2024. La selección de ponentes incluye tanto a investigadores establecidos como a doctores recientes y estudiantes con tesis en curso.

Palabras clave: Dinámica Compleja; Operadores de tipo Volterra y Toeplitz; Subespacios Invariantes y Ciclicidad; Derivadas Schwarzianas; Operadores de Composición (Ponderados).

Programa

LUNES, 19 de enero

- 15:30 – 16:00 Eva Gallardo (Universidad Complutense de Madrid)
Insights on the Invariant Subspace Problem
- 16:00 – 16:30 Antoni López-Martínez (Universitat Politècnica de València)
The solution to the $T \oplus T$ -recurrence problem
- 16:30 – 17:00 Alberto Dayan (Universitat Autònoma de Barcelona)
Cyclicity of singular inner functions on Besov and coefficient spaces
- 17:00 – 17:30 María J. Martín (Universidad de La Laguna)
Higher order harmonic Schwarzian derivatives

MARTES, 20 de enero

- 11:00 – 11:30 Luis Rodríguez-Piazza (Universidad de Sevilla)
Some questions about weighted Hardy spaces
- 11:30 – 12:00 Jesús Oliva-Maza (Universidad de Zaragoza)
Surjectivity of the translated weighted composition operators
- 12:00 – 12:30 Manuel D. Contreras (Universidad de Sevilla)
Boundary behavior of the iterates of a holomorphic self-map of the unit disc
- 15:30 – 16:00 Francisco J. Cruz-Zamorano (Universidad de Sevilla)
The rate of convergence of orbits in complex dynamics
- 16:00 – 16:30 Oscar Blasco (Universidad de Valencia)
Cèsaro-type operators on mixed norm spaces
- 16:30 – 17:00 Daniel Girela (Universidad de Málaga)
Rhaly operators acting on spaces of analytic functions
- 17:00 – 17:30 Carme Cascante Canut (Universitat de Barcelona)
Words of analytic paraproducts on Bergman spaces induced by smooth rapidly decreasing weights
- 18:00 – 18:30 Álvaro Miguel Moreno López (Universidad de Málaga)
Fractional Volterra-type operator
- 18:30 – 19:00 Bozhidar E. Mihaylov (Universidad Autónoma de Madrid)
On the range of Toeplitz operators

Insights on the Invariant Subspace Problem

Eva A. Gallardo-Gutiérrez

Universidad Complutense de Madrid & Instituto de Ciencias Matemáticas ICMAT

egallard@ucm.es

The Invariant Subspace Problem, dating back to von Neumann's works in 1950, remains one of the central open problems in Operator Theory on Hilbert spaces, inspiring deep connections with areas such as Geometric Function Theory, Spectral Theory, and Complex Analysis. Despite its simplicity, even the existence of non-trivial closed invariant subspaces for compact perturbations of self-adjoint operators is still open. The situation is even hopeless if one considers finite rank compact perturbations of normal operators. In this talk we will address these questions and show recent improvements exhibiting broad classes of such perturbations with plenty of non-trivial closed invariant subspaces.

The solution to the $T \oplus T$ -recurrence problem

Antoni López-Martínez

Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

alopezmartinez@mat.upv.es

Let X be a separable infinite-dimensional F-space. Given a continuous linear operator $T : X \longrightarrow X$ with some dynamical “property” (hypercyclicity, chaos, etc.), it is natural to ask whether the direct sum operator

$$T \oplus T : X \oplus X \longrightarrow X \oplus X,$$

acting as $T \oplus T(x_1, x_2) := (Tx_1, Tx_2)$ on the direct sum space $X \oplus X$, presents again that “property”. This question will be called the $T \oplus T$ -“property” problem. In this talk we will discuss the $T \oplus T$ -recurrence problem, which was posed as an open question in [4]. In particular, we will motivate the problem by looking at the $T \oplus T$ -hypercyclicity problem (see [5, 2, 3]); and then we will expose a complete solution to the $T \oplus T$ -recurrence problem in every separable infinite-dimensional Banach space, using a construction from [1] in a crucial way.

References

- [1] J.-M. Augé. Linear Operators with Wild Dynamics. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140(6) (2012), 2103–2116.
- [2] F. Bayart and É. Matheron. Hypercyclic operators failing the Hypercyclicity Criterion on classical Banach spaces. *J. Funct. Anal.*, 250(2) (2007), 426–441.
- [3] F. Bayart and É. Matheron. (Non-)Weakly mixing operators and hypercyclicity sets. *Ann. de l’Institut Fourier*, 59(1) (2009), 1–35.
- [4] G. Costakis, A. Manoussos, and I. Parissis. Recurrent linear operators. *Complex Anal. Oper. Theory*, 8(2014), 1601–1643.
- [5] M. De La Rosa and C. Read. A hypercyclic operator whose direct sum $T \oplus T$ is not hypercyclic. *J. Oper. Theory*, 61 (2009), 369–380.
- [6] S. Grivaux, A. López-Martínez, and A. Peris. Questions in linear recurrence I: The $T \oplus T$ -recurrence problem to lineability. *Anal. Math. Phys.*, 15(1) (2025), 26 pages.

Acknowledgments. This talk is based on a joint work with Sophie Grivaux and Alfred Peris [6]. This work was partially supported by the project FRONT of the French National Research Agency (grant ANR-17-CE40-0021), by the Labex CEMPI (ANR-11-LABX-0007-01), by the Spanish Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, grant number FPU2019/04094, by MCIN/AEI/10.13039/501100011033, Projects PID2019-105011GB-I00 and PID2022-139449NB-I00, and by Generalitat Valenciana, Project PROMETEU/2021/070.

Cyclicity of singular inner functions on Besov and coefficient spaces

Alberto Dayan

Department de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona

alberto.dayan@uab.cat

The seminal work of Beurling says that no singular inner function can be cyclic for the Hardy space on the unit disc. On the other hand, Korenblum showed that some singular inner functions are cyclic in Bergman-type spaces.

In this talk, we show the existence of singular inner functions that are cyclic in Besov-type spaces. As a corollary, we will see how such singular inner functions are cyclic also for the space of those analytic functions with p -summable Taylor coefficient, for $p > 2$. Our condition relies only on the second modulus of continuity of the underlying singular measure, and hence is far more treatable than the one provided by Anderson, Fernández and Shields in the setting of the small Bloch space. Time permitting, we will also discuss whether such cyclic singular inner function are multipliers of the Besov and the coefficient spaces that we consider.

Acknowledgments. This talk is based on a joint work with Daniel Seco.

Higher order harmonic Schwarzian derivatives

María J. Martín

Departamento de Análisis Matemático & IMAULL, Universidad de La Laguna.

maria.martin@ull.es

Let Ω be a domain in the complex plane. A *harmonic mapping* in Ω is a complex valued function $f = u + iv$ whose real and imaginary parts are (real) harmonic in Ω . Analytic functions are a special case where the real and imaginary parts are conjugate harmonic functions, satisfying the Cauchy–Riemann equations. In those cases when the domain Ω is simply connected, the harmonic mapping f can be written as $f = h + \bar{g}$, where both h and g are analytic in Ω .

The landmark paper by James Clunie and Terry Sheil-Small in 1984, points out that many of the classical results for conformal functions have clear analogues for univalent harmonic mappings. However, as Peter Duren mentions in his book on harmonic mappings in the plane, “as soon as analyticity is abandoned, serious obstacles arise”. The purpose of this talk is to show a generalization of some particular objects introduced for analytic functions to those cases when the functions considered are merely harmonic. More concretely, we propose a definition of higher order Schwarzian derivatives for locally univalent harmonic mappings. The definition will be based on the relation between the classical formulas of the pre-Schwarzian and Schwarzian derivatives of locally univalent analytic functions and the derivatives of the generating functions of the methods due to Newton and Halley, respectively, for approximating zeros. We will prove that the higher order harmonic Schwarzian derivatives we obtain coincide, in those cases when the functions considered are holomorphic, with the Aharonov invariants, introduced by Don Aharonov in 1969.

Acknowledgments. This is a joint work with F. Pérez-González and Alexis Quintero-Díaz.

Some questions about weighted Hardy spaces

Luis Rodríguez-Piazza

Departamento de Análisis Matemático & IMUS, Universidad de Sevilla

piazza@us.es

Given a sequence $\beta = (\beta_n)_{n \geq 0}$ of positive real numbers (the weights) we define *the weighted Hardy space* $H^2(\beta)$ as the space formed by all functions f analytic at 0 and whose power series at 0, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, satisfies

$$\|f\|_{H^2(\beta)}^2 := \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \beta_n < +\infty.$$

We will always assume that the sequence of weights (β_n) satisfies the condition

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{1/n} \geq 1,$$

and so, every function $f \in H^2(\beta)$ is holomorphic on the whole open unit disc $\mathbb{D}$.

Many classical Hilbert spaces of analytic functions appear as weighted Hardy spaces. For instance, this is the case for Hardy, Bergman and Dirichlet spaces.

If $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ is holomorphic, the composition operator C_φ of symbol φ is simply

$$C_\varphi: f \mapsto f \circ \varphi, \quad \text{for all } f \in \text{Hol}(\mathbb{D}).$$

It is known that, for every symbol φ , C_φ defines a bounded operator on Hardy and Bergman spaces; but this is not true on the Dirichlet space.

In the eighties N. Zorboska raised the following natural question:

Determine the sequences $\beta = (\beta_n)_{n \geq 0}$ for which every symbol $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ defines a bounded composition operator $C_\varphi: H^2(\beta) \rightarrow H^2(\beta)$.

In this talk I will present some results, included in [1] and [2], obtained in collaboration with P. Lefèvre, D. Li and H. Queffélec, dealing with this and other questions about weighted Hardy spaces.

References

- [1] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, *Characterization of weighted Hardy spaces on which all composition operators are bounded*. To appear in Analysis & PDE.
- [2] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, *On some questions about composition operators on weighted Hardy spaces*. To appear in Pure and Applied Functional Analysis.

Surjectivity of the translated weighted composition operators

J. Oliva-Maza

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

`joliva@unizar.es`

Weighted composition operators play a crucial role in the study of Banach spaces of holomorphic functions, with one of the main objectives being to describe the operator theoretic properties of uC_φ in terms of the analytic properties of the symbols $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ and $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$. Over the past decade, there have been significant advances in determining the spectrum $\sigma(uC_\varphi)$, usually described through the behavior of u and φ in a neighborhood of the fixed points of φ . In this context, the surjectivity of the translates $\lambda - uC_\varphi$, $\lambda \in \sigma(uC_\varphi)$, was studied in [3], with applications to the theory of universal operators via Caradus' theorem.

In this talk, we present our recent work, in which we obtain the surjectivity of $\lambda - uC_\varphi$, where $\lambda \in uC_\varphi$, φ a hyperbolic Möbius transformation, and u satisfying certain mild hypotheses. Our results constitute an extension of the case $u = 1$, which was solved in [2] for the Hardy space $H^2(\mathbb{D})$. Our approach is completely different from that of [2], which relies on the identification of $H^2(\mathbb{D})$ with $L^2(\mathbb{R})$ and on the results of [4], and is not adaptable to the case $u \neq 1$ or to other spaces. In contrast, our techniques embed certain subspaces of our function space into a space where uC_φ is invertible, and this invertibility allows us to apply the techniques from [1].

References

- [1] L. Abadias, J. González-Doña, J. Oliva-Maza (2025). Universality arising from invertible weighted composition operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 545, No. 129129.
- [2] J. Carmo, W. Noor (2022). Universal Composition Operators. *J. Oper. Theory*, 87(1), No. 137–156.
- [3] E. Nordgren, P. Rosenthal and F. S. Wintrobe (1987). Invertible composition operators on H^p . *J. Funct. Anal.*, no. 2, 324–244.
- [4] J. R. Partington and E. Pozzi (2011). Universal Shifts and Composition Operators. *Oper. Matrices*, 5 (3), 455–467.

Acknowledgments. Joint work with L. Abadias, J. González-Doña and A. Mahillo.

Boundary behavior of the iterates of a holomorphic self-map of the unit disc

Manuel D. Contreras

Departamento de Matemática Aplicada II and IMUS, Universidad de Sevilla

contreras@us.es

The study of iterated functions is fundamental to complex dynamics. For a holomorphic self-map f of the unit disc $\mathbb{D}$, the Denjoy-Wolff Theorem (1929) establishes a key convergence property: if f is not an elliptic automorphism, its sequence of iterates, $\{f^{\circ n}\}$, converges uniformly on compact subsets to a point $\tau \in \overline{\mathbb{D}}$, called the Denjoy-Wolff point of f .

A related question concerns the behavior of these iterates at the boundary. By Fatou's Theorem, all functions $f^{\circ n}$ have non-tangential limits at almost every point on the boundary of the unit disc. We denote these non-tangential limits as $(f^{\circ n})^*$. The behavior of the sequence $\{(f^{\circ n})^*\}$ depends significantly on whether f is an inner function or not. When f is an inner function, the behaviour of $\{(f^{\circ n})^*\}$ is well-established and can be found in texts by Anderson or Doering and Mañé.

However, when f is not an inner function, the problem was not solved. Previous partial results have been contributed by Bourdon, Matache, and Shapiro; by Poggi-Corradini; and by Contreras, Díaz-Madriral, and Pommerenke. In a recent work with Betsakos and Díaz-Madriral, we achieved the final solution: if f is not an inner function, then the sequence $\{(f^{\circ n})^*\}$ converges to τ for almost every point on $\partial\mathbb{D}$.

The rate of convergence of orbits in complex dynamics

Francisco J. Cruz-Zamorano

Departamento de Matemática Aplicada II, Universidad de Sevilla

fcruz4@us.es

Discrete Complex Dynamics in the unit disk $\mathbb{D}$ studies the asymptotic behaviour of the iterates $f^n = f \circ \dots \circ f$ of a given holomorphic self-map $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$. A seminal result due to Denjoy and Wolff (1929) established that, if f has no fixed points in $\mathbb{D}$, then there exists a (unique) point $\tau \in \partial\mathbb{D}$ (known as the Denjoy-Wolff point of f) such that $f^n \rightarrow \tau$ locally uniformly in $\mathbb{D}$. Consequently, τ serves as a global attractor for the dynamics of f .

Recent research has focused on quantifying the rate of convergence of orbits ($f^n(z)$) towards the Denjoy-Wolff point τ , that is, the asymptotic behavior of $|f^n(z) - \tau|$ as $n \rightarrow \infty$. This talk presents a characterization of those self-maps f exhibiting an extremal rate of convergence (i.e., maps for which $f^n(z)$ approaches τ at the slowest possible rate). For instance, it turns out that this extremal behavior is determined by specific integrability conditions on the Herglotz representation associated with f .

Acknowledgments. This is a joint work with Konstantinos Zarvalis (Aristotle University of Thessaloniki, Greece).

Cèsaro-type operators on mixed norm spaces

Oscar Blasco

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Valencia

oscar.blasco@uv.es

Given a positive Borel measure μ defined in $[0, 1)$ and $\beta > 0$, we denote by

$$\mathcal{C}_{\mu,\beta}(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \left(\sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n-k+\beta)}{(n-k)!\Gamma(\beta)} a_k \right) z^n$$

where $\mu_n = \int_0^1 t^n d\mu(t)$ and $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. It is elementary to see that

$$\mathcal{C}_{\mu,\beta}(f)(z) = \int_0^1 \frac{f(tz)}{(1-tz)^\beta} d\mu(t).$$

We shall try to describe the boundedness of $\mathcal{C}_{\mu,\beta}$ acting between different mixed norm space $H(p, q, \alpha)$ consisting in functions $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ such that

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \left(\int_0^1 (1-r)^{q\alpha-1} M_p^q(f, r) dr \right)^{1/q} < \infty.$$

Complete characterization is achieved in several cases in terms of properties of the function $F_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^n$. This extends previously known results on weighted Bergman spaces.

References

- [1] P. Galanopoulos, D. Girela, N. Merchan, *Cèsaro-like operators acting on spaces of analytic functions*, *Anal. Math. Phys.* 12 (51), 2022.
- [2] P. Galanopoulos, A.G. Siskakis, R. Zhao, *Weighted Cesàro type operators between weighted Bergman spaces* *Bull. Sci. Math.* 202 (2025), Paper No. 103622, 17 pp.

Acknowledgments. Joint work with Alejandro Mas.

Rhaly operators acting on spaces of analytic functions

Daniel Girela

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Málaga

girela@uma.es

Let $\mathcal{S}$ be the space of all complex sequences. If $(\eta) = \{\eta_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{S}$, the Rhaly operator $R_{(\eta)} = R_{\{\eta_n\}}$ is defined in $\mathcal{S}$ as follows: If $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{S}$, then

$$R_{\{\eta_n\}}(\{a_n\}_{n=0}^{\infty}) = \left\{ \eta_n \sum_{k=0}^n a_k \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Rhaly operators are a natural generalization of the Cesàro operator.

Identifying a function f , analytic in the unit disc $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, with the sequence of its Taylor coefficients, $R_{(\eta)}$ can be seen as an operator acting on spaces of analytic functions in $\mathbb{D}$: If f is holomorphic in $\mathbb{D}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ($z \in \mathbb{D}$), then $R_{(\eta)}(f)$ is formally defined by

$$R_{(\eta)}(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

whenever the right hand side makes sense and defines an analytic function in $\mathbb{D}$.

In this talk I will speak about a number of results obtained recently in collaboration with Petros Galanopoulos, regarding the operators $R_{(\eta)}$ acting on distinct spaces of analytic functions in $\mathbb{D}$.

Words of analytic paraproducts on Bergman spaces induced by smooth rapidly decreasing weights

Carme Cascante Canut

Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona

cascante@ub.edu

For a fixed analytic function g on the unit disc, we consider the analytic paraproducts induced by g , which are formally defined by $T_g f(z) = \int_0^z f(\zeta) g'(\zeta) d\zeta$, $S_g f(z) = \int_0^z f'(\zeta) g(\zeta) d\zeta$, and $M_g f(z) = g(z) f(z)$. An N -letter g -word is an operator of the form $L = L_1 \cdots L_N$, where each L_j is either M_g , S_g or T_g . It has been recently proved in [1, 2] that understanding the boundedness of a g -word on classical Hardy and Bergman spaces is a challenging problem due to the potential cancellations involved. Our main result provides a complete quantitative characterization of the boundedness of an arbitrary g -word on a weighted Bergman space $A_{\omega^{p/2}}^p$, where $\omega = e^{-2\varphi}$ is a smooth rapidly decreasing weight. In particular, it states that any N -letter g -word such that $\#\{j : L_j = T_g\} = n \geq 1$ is bounded on $A_{\omega^{p/2}}^p$ if and only if g satisfies the "fractional" Bloch-type condition

$$\|g\|_{\mathcal{B}_\varphi^s}^s := \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{s|g(z)|^{s-1}|g'(z)|}{1 + \varphi'(|z|)} < \infty,$$

where $s = \frac{N}{n}$, and $\|L\|_{A_{\omega^{p/2}}^p} \simeq \|g\|_{\mathcal{B}_\varphi^s}^N$.

The class of smooth rapidly decreasing weights contains the radial weights

$$\omega_n(z) = e^{-2 \exp_n(g_{\alpha,c}(|z|))}, \quad \text{where} \quad g_{\alpha,c}(r) = \frac{c}{(1-r^2)^\alpha}, \quad \text{for } c, \alpha > 0,$$

$\exp_0(x) = x$ and $\exp_n(x) = e^{\exp_{n-1}(x)}$, for $n \in \mathbb{N}$. Therefore it contains weights which decrease arbitrarily rapidly to zero as $|z| \rightarrow 1^-$.

References

- [1] A. Aleman, C. Cascante, J. Fàbrega, D. Pascuas, and J. A. Peláez, *Composition of analytic paraproducts*, J. Math. Pures Appl. 158 (2022), 293–319. [doi:10.1016/j.matpur.2021.11.007](https://doi.org/10.1016/j.matpur.2021.11.007).
- [2] A. Aleman, C. Cascante, J. Fàbrega, D. Pascuas, and J. A. Peláez, *Words of analytic paraproducts on Hardy and weighted Bergman spaces*, J. Math. Pures Appl. 188 (2024), 179–214. [doi:10.1016/j.matpur.2024.05.002](https://doi.org/10.1016/j.matpur.2024.05.002).
- [3] C. Cascante, J. Fàbrega, D. Pascuas, and J. A. Peláez, *On the radicality property for spaces of symbols of bounded Volterra operators*, J. Funct. Anal. 287 (2024), no.12, Paper No. 110658, 29 pages. [doi:10.1016/j.jfa.2024.110658](https://doi.org/10.1016/j.jfa.2024.110658).
- [4] C. Cascante, J. Fàbrega, D. Pascuas, and J. A. Peláez, *Words of analytic paraproducts on Bergman spaces induced by smooth rapidly decreasing weights*, (preprint). arxiv.org/abs/2504.09105.

Acknowledgments. Joint work with J. Fàbrega, D. Pascuas and J.A. Peláez.

Fractional Volterra-type operator

Álvaro Miguel Moreno López

Departamento Análisis Matemático, Estadística e I.O. y Matemática Aplicada, Universidad de Málaga

alvarommorenolopez@uma.es

Let $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ denote the space of analytic functions on the unit disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Essential properties such as boundedness, compactness and the membership to Schatten classes of the classical Volterra-type operator

$$V_g(f)(z) = \int_0^z f(\zeta) g'(\zeta) d\zeta, \quad z \in \mathbb{D}, f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),$$

were studied on classical Hardy and Bergman spaces in the seminal papers [1, 2, 3]. In this talk, we consider a generalization of this operator where the derivative and primitive are replaced by a fractional derivative and primitive. Being precise, given a radial weight μ on $\mathbb{D}$, and a function $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, we define the fractional derivative and integral operators:

$$D^\mu(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(n)}{\mu_{2n+1}} z^n, \quad I^\mu(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2n+1} \widehat{f}(n) z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

where $\mu_x = \int_0^1 \mu(r) r^x dr$. Using these operators, we consider the fractional Volterra-type operator

$$V_{\mu,g}(f)(z) = I^\mu(f \cdot D^\mu(g))(z), \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), z \in \mathbb{D}.$$

Throughout the talk it will be presented some results on essential properties of the action the $V_{\mu,g}$ on classical Hardy and Bergman spaces

References

- [1] A. Aleman and J. A. Cima, *An integral operator on H^p and Hardy's inequality*, J. Anal. Math. 85 (2001), 157–176; MR1869606
- [2] A. Aleman and A. Siskakis, *An integral operator on H^p* , Complex Variables Theory Appl. 28 (1995), no. 2, 149–158.
- [3] A. Aleman and A. G. Siskakis, *Integration operators on Bergman spaces*, Indiana Univ. Math. J. 46 (1997), no. 2, 337–356; MR1481594

Acknowledgments. These results are part of a joint work together with C. Bellavita, G. Nikolaidis and J. A. Peláez.

On the range of Toeplitz operators

Bozhidar E. Mihaylov

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

bozhidar.emilov@estudiante.uam.es

A Toeplitz operator acting on the Hardy space H^2 is defined as the composition of a multiplication operator with symbol $\phi \in L^\infty$ and the Riesz orthogonal projection. One property of these operators is that, given a nonzero and non-injective Toeplitz operator T_ϕ , its range contains the polynomials, which refines Coburn's Lemma.

In this talk (based on ongoing work), we present a characterization, in terms of the symbol ϕ , of Toeplitz operators whose range contains the polynomials, and we use it to give a characterization of those operators that have a nontrivial kernel. Finally, we discuss some applications of these results to the study of the spectrum of general Toeplitz operators.

References

- [1] A. BROWN, P. HALMOS: Algebraic Properties of Toeplitz Operators *J. Reine Angew. Math.* 213 (1963), 89-102.
- [2] L. COBURN: Weyl's Theorem for Nonnormal Operators. *Michigan Math. J.* 13 (1966), 285-288.
- [3] R. DOUGLAS: Banach Algebra Techniques in Operator Theory, *Springer, New York* 1998.
- [4] A. HARTMANN, M. MITKOVSKI: Kernels of Toeplitz operators, Recent progress on operator theory and approximation in spaces of analytic functions, 147–177, *Contemp. Math.* 679, *Amer. Math. Soc., Providence, RI* 2016.
- [5] P. KOOSIS: Introduction to H^p spaces. *Cambridge University Press, Cambridge* 1988.
- [6] R. MARTÍNEZ-AVENDAÑO, P. ROSENTHAL: An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space. *Springer, New York* 2007.
- [7] D. SARASON: Sub-Hardy Hilbert Spaces in the Unit Disk. *University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences* 10, *John Wiley & Sons Inc., New York*, 1994.
- [8] D. VUKOTIĆ: A Note On The Range of Toeplitz Operators. *Integral Equations Operator Theory* 50 (2004), 565-567.

Acknowledgments. Joint work with D. Vukotić.

Sesión especial 5

Análisis funcional, análisis armónico y métodos variacionales: nuevas direcciones

Equipo organizador:

- *Ángel San Antolín Gil* (Universidad de Alicante)
- *Fernando García Castaño* (Universidad de Alicante)
- *José Carlos Navarro Climent* (Universidad de Alicante)

Descripción

Esta sesión reúne contribuciones recientes que exploran nuevas direcciones en análisis funcional, análisis armónico y métodos variacionales, con énfasis tanto en desarrollos teóricos como en aplicaciones. Se abordarán cuestiones como la regularidad de soluciones de EDPs en entornos no locales o definidos sobre nubes de datos aleatorias, así como propiedades de marcos de Parseval, funciones armónicas univalentes y la influencia del principio de incertidumbre en modelos cuánticos. Otras charlas se centran en técnicas de suavización en optimización convexa, el comportamiento del inradio asintótico en espacios de Banach o el uso de métodos de teoría de conjuntos —como forcing o teoría descriptiva— en la resolución de problemas estructurales en análisis funcional. La sesión también incluye resultados recientes sobre el índice numérico en espacios bidimensionales, medidas vectoriales y clases de funciones casi periódicas en el plano complejo. Esta variedad temática refleja la riqueza de ideas y la interacción entre distintas áreas del análisis actual, así como su conexión con campos emergentes como el aprendizaje automático y el control óptimo.

Palabras clave: Análisis funcional, Análisis armónico, Métodos variacionales, Espacios de Banach, Ecuaciones en derivadas parciales.

Programa

JUEVES, 22 de enero

- | | |
|---------------|---|
| 11:00 – 11:30 | Gustavo Garrigós Aniorte (Universidad de Murcia)
<i>Fatou type theorems for Poisson integrals associated with the Hermite operator</i> |
| 11:30 – 12:00 | Matías Raja Baño (Universidad de Murcia)
<i>La persistencia del inradio asintótico</i> |
| 12:00 – 12:30 | Antonio Avilés López (Universidad de Murcia)
<i>Aplicaciones de la teoría de conjuntos a problemas en espacios de Banach</i> |
| 12:30 – 13:00 | Antonio José Guirao Sánchez (Universitat Politècnica de València)
<i>Índice numérico en espacios bidimensionales: avances y aplicaciones</i> |
| 15:30 – 16:00 | José Rodríguez Ruiz (Universidad de Castilla-La Mancha)
<i>Cuestiones sobre medidas vectoriales</i> |
| 16:00 – 16:30 | Oscar Blasco de la Cruz (Universidad de Valencia)
<i>Sobre el Principio de Incertidumbre y aplicaciones</i> |
| 16:30 – 17:00 | Davide Barbieri (Universidad autónoma de Madrid)
<i>Some problems of harmonic analysis in machine learning and neural networks</i> |
| 17:00 – 17:30 | Ángel Arroyo García (Universidad de Alicante)
<i>Regularity estimates for approximations of elliptic PDE's on random data clouds</i> |
| 18:00 – 18:30 | Carlos Esteve Yagüe (Universidad de Alicante)
<i>Boundary profile for certain Hamilton-Jacobi equations</i> |
| 18:30 – 19:00 | María José Martín Gómez (Universidad de la Laguna)
<i>On harmonic univalent functions</i> |

VIERNES, 23 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:30 | Mohammed Ibrahime Abdelkayoum Ghitri (Universidad de Alicante)
<i>Smoothing Effects of Epi-convergence and Infimal convolution in Optimization</i> |
| 11:30 – 12:00 | Chahla Boukeffous (Universidad de Alicante)
<i>Approximation properties of Parseval frames via extension principles</i> |
| 12:00 – 12:30 | José Orihuela (Universidad de Murcia)
<i>Solution to open problems going back to Joram Lindenstrauss</i> |
| 12:30 – 13:00 | Hadjer Ounis (Universidad de Alicante)
<i>The class of c-almost periodic functions defined on vertical strips in the complex plane</i> |

Regularity estimates for approximations of elliptic PDE's on random data clouds

Ángel Arroyo García

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

angelrene.arroyo@ua.es

The regularity question is one of the main problems in Analysis of PDE's. In the 70s, Krylov and Safonov proved that the solutions of PDEs in non divergence form are Hölder continuous. In the last decade, this result have been adapted to the nonlocal setting in several contexts. In particular, in previous works, we adapted this regularity estimate for a class of nonlocal approximations of elliptic PDE's arising from a generalization of the mean value property for harmonic functions.

On the other hand, in the recent years, the analysis of functions defined on random data clouds has received an increasing attention due to its connection with Machine Learning. For that reason, in this talk we address the regularity problem on random data clouds, for which we adapt the nonlocal Krylov-Safonov theory for functions satisfying Pucci-type extremal inequalities.

It is worth mentioning that the mean value property, which is the corner stone in the connection between elliptic PDE's and their nonlocal counterparts, can also be interpreted from a stochastic point of view, allowing the use of probabilistic ideas. Our proof, however, relies entirely on analytic arguments.

Aplicaciones de la teoría de conjuntos a problemas en espacios de Banach

Antonio Avilés López

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

avileslo@um.es

En esta charla se revisarán trabajos recientes en los que se han aplicado técnicas de teoría de conjuntos —como el *forcing* y la teoría descriptiva— para abordar problemas abiertos en el contexto de los espacios de Banach y los retículos de Banach. Se destacarán tanto los resultados obtenidos como el papel fundamental que juegan estas herramientas *set-theoretic* en la resolución de cuestiones estructurales y topológicas en análisis funcional.

Some problems of harmonic analysis in machine learning and neural networks

Davide Barbieri

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

davide.barbieri@uam.es

Neural networks are a class of functions that has proved to be particularly effective in approximating data for classification or generative tasks. To this end, the structure of the parameterization, often called “architecture”, is crucial. For images and data whose information is encoded in localized features, convolutional structures encoding locality provide the best result. Extending the symmetries of convolutional neural networks can lead to architectures capable of dealing with more structured data, but requires techniques of abstract harmonic analysis. We will present some recent result concerning the relationship with Fourier analysis on groups and with sampling theory, and briefly discuss open problems.

Sobre el Principio de Incertidumbre y aplicaciones

Óscar Blasco

Universitat de València

oscar.blasco@uv.es

El principio de incertidumbre fue propuesto por Wener Heisenberg en 1927, y afirma que el producto de las incertidumbres de la posición y el momento lineal siempre será mayor o igual que un valor mínimo dado por la constante de Planck,

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}.$$

Coloquialmente hablando, este principio nos indica que es físicamente imposible medir simultáneamente la posición y el momento lineal exacto de una partícula. Además, haremos una revisión de las aplicaciones que tiene el principio de incertidumbre al estudio de fluctuaciones cuánticas, a la ecuación de Dirac y a la Ecuación de Schrödinger.

Approximation properties of Parseval frames via extension principles

Chahla Boukeffous

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Alicante

chahlaboukeffous@gmail.com

From two functions in the Hilbert space $L^2(\mathbb{R}^d)$ whose Fourier transform has certain decay, one defines a quasi-projection operator. In this talk, we prove necessary and sufficient conditions on those functions in order to the associated quasi-projection operator provides a desired approximation order and density order. To give our conditions we will use the classical notion of approximate continuity. As a consequence, we obtain approximation properties of dual wavelet frame constructed by Mixed Oblique Extension Principle.

Boundary profile for certain Hamilton-Jacobi equations

Carlos Esteve

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

c.esteve@ua.es

We consider the boundary and initial-boundary value problem for some Hamilton-Jacobi equations arising in control theory and differential games. It is well-known that viscosity solutions for these problems may develop discontinuities on the boundary. In this talk, I will present some recent results that describe the behaviour of the solution near the boundary. Particularly, I will focus on, first, characterising the part of the boundary on which the boundary conditions are satisfied in the classical sense; and then, describing the profile of the solution on the parts of the boundary where the solution is discontinuous. nt results on harmonic mappings in the plane $F_0 + \overline{G_0}$ satisfying this latter condition.

Fatou type theorems for Poisson integrals associated with the Hermite operator

Gustavo Garrigós, G. Flores and B. Viviani.

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

gustavo.garrigos@um.es

We consider the problem of pointwise convergence of Poisson-type integrals at a point x_0 under the mild condition

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x_0)} f(x) dx = f(x_0),$$

which is weaker than usual Lebesgue point requirement.

Such result was proved by Fatou in 1906 for the classical Poisson integrals, and can be extended to approximate identities of convolution type with radially decreasing kernels.

Here we consider Poisson integrals related with the Hermite operator $L = -\Delta + |x|^2$, for which the associated Poisson kernel $P_t(x, y)$ is not of convolution type, nor radially decreasing. Yet, we are able to show that the above result holds when the dimension $n \leq 3$, and fails when $n > 3$.

This work is part of a joint project with the Argentinian mathematicians G. Flores and B. Viviani.

Smoothing Effects of Epi-convergence and Infimal convolution in Optimization

Mohammed Ibrahime Abdelkayoum Ghitri

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

moghitri@gmail.com

We use smoothing processes based on the infimal convolution of convex, proper and lower semi-continuous functions to regularize optimization problems given by convex-composite functions. We show that the proposed regularization schemes still (epi)converge to the original data, even if the chosen kernel is an arbitrary convex function. This also allows, without the use of qualifying conditions (namely, BCQ-type conditions), to derive upper estimates of the subdifferentials of the epi-limits of non-convex functions

Índice numérico en espacios bidimensionales: avances y aplicaciones

Antonio José Guirao Sánchez

Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

anguisa2@mat.upv.es

En esta charla presentaremos algunos avances recientes en el cálculo del índice numérico en espacios de dimensión dos, con especial atención a casos como los espacios *Lipschitz free* y los espacios ℓ_p . Se discutirán resultados concretos y técnicas desarrolladas en este contexto, que podrían resultar útiles para el estudio más general de estructuras finito-dimensionales en el análisis funcional.

On harmonic univalent functions

María José Martín

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna

mmartigo@ull.edu.es

The Eulerian description of the two-dimensional motion of an ideal homogeneous fluid is obtained by imposing the law of mass conservation $u_x + v_y = 0$ and Euler's equation of motion

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vv_y = -P_x, \\ v_t + uv_x + vu_y = -P_y, \end{cases}$$

where $(u(t, x, y), v(t, x, y))$ is the velocity field in the time and space variables (t, x, y) and the scalar function $P(t, x, y)$ represents the pressure.

Starting with a simply connected domain $\Omega_0 \subset \mathbb{C}$, representing the labeling domain, each label $(a, b) \in \Omega_0$ identifies by means of the *injective* map

$$(a, b) \mapsto (x(t; a, b), y(t; a, b)) = x(t; a, b) + iy(t; a, b) \quad (1)$$

the evolution in time of a specific particle, the fluid domain at time t , $\Omega(t)$, being the image of Ω_0 under the map (1).

Let F_0 and G_0 be two analytic functions in Ω_0 . Assume that F_0 is locally univalent, that $|G'_0(z)/F'_0(z)| < 1$ for all $z \in \Omega_0$, and that F'_0 and G'_0 are linearly independent. Define, for $\nu_0 \in \mathbb{R}$, $\xi_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t \in \mathbb{R}$, and $z = a + ib \in \Omega_0$,

$$\begin{cases} f(t, z) = e^{i\nu_0 t} F_0(z), \\ g(t, z) = e^{i(\xi_0 - \nu_0)t} G_0(z). \end{cases}$$

It is known that, then, $f(t, z) + \overline{g(t, z)} = x(t; a, b) + iy(t; a, b)$ is an explicit solution to the two-dimensional motion of an ideal homogeneous fluid, provided that $F_0 + \lambda \overline{G_0}$ is univalent in Ω_0 for all $|\lambda| = 1$. In our talk, we will review some recent results on harmonic mappings in the plane $F_0 + \overline{G_0}$ satisfying this latter condition.

Solution to open problems going back to Joram Lindenstrauss

José Orihuela, Vicente Montesinos

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

joseori@um.es

Let E be a Banach space and F a norming subspace in E^* . The Banach space E admits an equivalent $\sigma(E, F)$ -lower semicontinuous and rotund norm whenever it has another one with $\sigma(E, F)$ -closed faces which have separable support.

For a compact topological space $(K, \mathcal{T})$ we prove that $C(K)$ admits an equivalent pointwise lower semicontinuous rotund norm whenever the support of every probability measure on K is metrizable. Our approach do not use either retractions on K or projections in $C(K)$.

This results provides us a way to find the answer to another open question proving that every Banach space with a Fréchet differentiable norm has an equivalent locally uniformly rotund norm.

The class of c -almost periodic functions defined on vertical strips in the complex plane

Hadjer Ounis, Juan Matías Sepulcre

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Alicante

hadjerounis413@gmail.com

In this paper, we develop the notion of c -almost periodicity for functions defined on vertical strips in the complex plane. As a generalization of Bohr's concept of almost periodicity, we study the main properties of this class of functions which was recently introduced for the case of one real variable. In fact, we extend some important results of this theory which were already demonstrated for some particular cases. In particular, given a non-null complex number c , we show that the family of vertical translates of a prefixed c -almost periodic function defined in a vertical strip U is relatively compact on any vertical substrip of U , which leads to proving that every c -almost periodic function is also almost periodic and, in fact, c^m -almost periodic for each integer number m .

La persistencia del inradio asintótico

Matías Raja Baño

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

matias@um.es

En el contexto de los espacios de Banach, el término “asintótico” es algo ambiguo, ya que puede hacer referencia a fenómenos que ocurren cuando la dimensión tiende a infinito, o bien cuando se filtra a través de subespacios de codimensión finita. Así pues, el inradio asintótico puede ser entendido en dos sentidos muy diferentes. En la charla estudiamos lo que ocurre con estos inradios asintóticos aplicados a un cubrimiento finito por conjuntos convexos cerrados de la bola unidad de un espacio de Banach infinito-dimensional. Nos encontramos que para una de las nociones, siempre hay algún conjunto del cubrimiento con inradio igual a 1, los que tiene que ver con el fenómeno de concentración de la medida. Para el otro sentido del inradio asintótico, su mayor o menor “persistencia” tiene que ver con la geometría del espacio, encontrando en particular relaciones con los módulos AUC y AUS.

Cuestiones sobre medidas vectoriales

José Rodríguez Ruiz

Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha

jose.rodriguezruiz@uclm.es

En esta charla presentaremos algunos avances recientes (y problemas abiertos) alrededor de la teoría de las medidas vectoriales. Más concretamente, nos centraremos en teoremas de tipo Orlicz-Pettis y en resultados sobre la estructura de los retículos de Banach de funciones reales integrables respecto de medidas vectoriales.

Sesión especial 6

Análisis Geométrico

Equipo organizador:

- *Esther Cabezas-Rivas* (Universitat de València)
- *Vicente Miquel* (Universitat de València)

Descripción

Esta sesión especial reúne avances recientes en Análisis Geométrico, centrados en subvariedades, curvatura y estructuras métricas especiales. Se abordarán resultados sobre superficies mínimas, inmersiones isométricas, estabilidad en problemas de capilaridad, así como resultados sobre curvatura en espacios homogéneos y simétricos. También se presentarán avances en transporte óptimo, flujos geométricos (solitones) y ecuaciones de campo de Einstein en geometrías con densidad. Se explorarán métodos geométricos, analíticos y topológicos para entender fenómenos clásicos y desafíos actuales, como la rigidez isométrica, la inestabilidad de Rayleigh o el problema de Bernstein. Las ponencias combinan técnicas de Geometría Global, Ecuaciones Diferenciales, espacios de Wasserstein, y cálculo variacional. La sesión está pensada para fomentar el intercambio de ideas entre investigadores en diferentes subáreas del Análisis Geométrico, creando sinergias que permitan abordar nuevos retos y problemas abiertos.

Palabras clave: Geometría Riemanniana; Superficies mínimas; Curvatura; Espacios homogéneos; Ecuaciones en derivadas parciales geométricas.

Programa

LUNES, 19 de enero

- 15:30 – 16:00 Pablo Mira Carrillo (Universidad Politécnica de Cartagena)
Superficies mínimas, jerarquía KdV y el problema de Serrin
- 16:00 – 16:30 Teo Gil Moreno de Mora Sardà (Université Paris-Est Créteil)
Complete 3-manifolds of positive scalar curvature with quadratic decay
- 16:30 – 17:00 Irene Ortiz (Universidad de Murcia)
The Plateau-Rayleigh instability of translating lambda-solitons
- 17:00 – 17:30 Víctor Sanmartín-López (Universidad Santiago de Compostela)
Curvatura adaptada y cohomogeneidad uno en espacios simétricos

MARTES, 20 de enero

- 11:00 – 11:30 Miguel Brozos Vázquez (Universidade da Coruña)
Ecuaciones de campo de Einstein en espacio-tiempos con densidad
- 11:30 – 12:00 José Miguel Manzano (Universidad de Jaén)
Inmersiones isométricas de superficies en grupos de Lie métricos unimodulares
- 12:00 – 12:30 Andrea del Prete (Università degli Studi di Pavia)
Hacia el problema de Bernstein para superficies mínimas en Sol_3 mediante una correspondencia con AdS^3
- 15:30 – 16:00 Antonio Alarcón (Universidad de Granada)
Propiedades genéricas de las superficies mínimas
- 16:00 – 16:30 Antonio Cañete (Universidad de Sevilla)
Stable and isoperimetric regions for the free boundary problem in bounded annuli of revolution with increasing Gauss curvature
- 16:30 – 17:00 Miguel Domínguez Vázquez (Universidad Santiago de Compostela)
Normal homogeneous spaces with positive 2-intermediate Ricci curvature
- 17:00 – 17:30 Sara Albert-Nicòs (Universidad de Valencia)
Flujos de curvatura con restricciones en superficies Hadamard pinzadas
- 18:00 – 18:30 Jaime Santos-Rodríguez (Universidad Politécnica de Madrid)
Rigidez y flexibilidad isométrica en espacios de Wasserstein
- 18:30 – 19:00 Alberto Cerezo (Universidad de Granada)
Capillary Surfaces and an Overdetermined Problem in the Sphere

Superficies mínimas, jerarquía KdV y el problema de Serrin

Pablo Mira, Alberto Cerezo, Isabel Fernández

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad Politécnica de Cartagena

`pablo.mira@upct.es`

En su famoso artículo [5], J. Serrin demostró que los únicos dominios regulares acotados Ω de $\mathbb{R}^n$ donde el problema sobredeterminado

$$\begin{cases} \Delta u + 2 = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = b & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene solución son las bolas. Aquí, ν es el normal exterior unitario de $\partial\Omega$, y $b \in \mathbb{R}$. La demostración de este teorema ha sido muy influyente en la teoría de EDPs elípticas, ya que introdujo en este contexto el principio de reflexión de Alexandrov para superficies de curvatura media constante (CMC). A lo largo de los años, diversos autores han estudiado y profundizado la conexión entre el problema de Serrin y la geometría global de superficies mínimas y CMC.

En esta charla repasaremos algunos de los teoremas principales conocidos sobre esta conexión, y presentaremos nuevos resultados sobre la resolución de problemas de tipo Serrin en dimensión dos mediante técnicas de superficies mínimas y sistemas integrables, inspirados en los trabajos geométricos de las referencias.

Referencias

- [1] A. Cerezo, I. Fernández, P. Mira (2025), Annular solutions to the partitioning problem in a ball, *J. Reine Angew. Math.*, 828, 57–81.
- [2] I. Fernández, L. Hauswirth, P. Mira (2023), Free boundary minimal annuli immersed in the unit ball, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 247, 108.
- [3] W.H. Meeks, J. Pérez, A. Ros (2015), Properly embedded minimal planar domains, *Ann. Math.*, 181, 473–546.
- [4] U. Pinkall, I. Sterling (1989), On the classification of constant mean curvature tori, *Ann. Math.*, 130, 407–451.
- [5] J. Serrin (1971), A symmetry theorem in potential theory, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 43, 304–318.

Complete 3-manifolds of positive scalar curvature with quadratic decay

Teo Gil Moreno de Mora Sardà, Florent Balacheff, Stéphane Sabourau

Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, Université Paris-Est Créteil

`teo.gil-moreno-de-mora-i-sarda@u-pec.fr`

We will explain how complete Riemannian 3-manifolds whose scalar curvature is positive with a subquadratic decay at infinity decompose as a (possibly infinite) connected sum of spherical manifolds and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ summands. This generalises a result by Gromov [2] and Wang [3] using a more topological approach. This is joint work [1] with Teo Gil Moreno de Mora Sardà and Stéphane Sabourau.

References

- [1] F. Balacheff, T. Gil Moreno de Mora Sardà, S. Sabourau (2024). Complete 3-manifolds of positive scalar curvature with quadratic decay, *preprint*, arxiv.org/pdf/2407.07198.
- [2] M. Gromov (2023). *Four lectures on scalar curvature*. In Perspectives in scalar curvature. Vol. 1, pages 1–514. World Sci. Publ., Hackensack, NJ.
- [3] J. Wang (2023). Topology of 3-manifolds with uniformly positive scalar curvature, *preprint*, [arXiv:2212.14383v2](https://arxiv.org/abs/2212.14383v2).

The Plateau-Rayleigh instability of translating λ -solitons

Irene Ortiz, Antonio Bueno, Rafael López

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

irene.ortiz@um.es

In 1873, Plateau observed that a stream of water dropping vertically was divided into smaller packets with the same volume but less surface area [3]. Plateau found experimentally that this happened when the length of the stream was greater than about 3.13 times its diameter. Later Rayleigh proved theoretically that a stream of radius r breaks into drops if its length is greater than $2\pi r$ [4]. This behavior is known as the Plateau-Rayleigh instability and it is part of a greater branch of fluid dynamics concerned with fluid thread breakup [2, Ch. 5].

Given a unit vector $v \in \mathbb{R}^3$ and $\lambda \in \mathbb{R}$, a translating λ -soliton is a surface in $\mathbb{R}^3$ whose mean curvature H satisfies $H = \langle N, v \rangle + \lambda$, $|v| = 1$, where N is the Gauss map of the surface. In this talk, we will explain how to extend the phenomenon of instability of Plateau-Rayleigh for translating λ -solitons of cylindrical type, proving that long pieces of these surfaces are unstable. We will provide explicit bounds on the length of these surfaces. It will be also proved that if a translating λ -soliton is a graph, then it is a minimizer of the weighted area in a suitable class of surfaces with the same boundary and the same weighted volume. This is joint work [1] with Antonio Bueno and Rafael López.

References

- [1] J. A. Bueno Linares, R. López Camino and I. Ortiz (2024). The Plateau-Rayleigh instability of translating λ -solitons, *Results Math.* 79, no. 2, Paper No. 58, 21 pp.
- [2] P-G De Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré (2004). *Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves*. Springer-Verlag, New York.
- [3] J. A. F. Plateau (2018). *Statique Expérimentale et Théorique Des Liquides Soumis Aux Seules Forces Moléculaires*. vol. 2. Gauthier-Villars.
- [4] L. Rayleigh (1878/79), On The Instability Of Jets, *Proc. Lond. Math. Soc.* 10, 4–13.

Curvatura adaptada y cohomogeneidad uno en espacios simétricos

Víctor Sanmartín López

Departamento de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela

`victor.sanmartin@usc.es`

Dentro de la Geometría de subvariedades, es natural comenzar por la investigación de aquellas subvariedades con un elevado grado de simetría, como puede ser el caso de las inducidas por acciones de cohomogeneidad uno (see e.g. [1]). Por otro lado, el operador de Jacobi y el operador forma son dos de los operadores más empleados para analizar la curvatura. Cuando conmutan, la subvariedad se dice de curvatura adaptada.

Uno de los objetivos principales de esta charla es el de presentar la clasificación de las acciones de cohomogeneidad uno en espacios simétricos de tipo no compacto. Además, veremos que es posible definir la noción de curvatura adaptada para cada acción de cohomogeneidad uno, y analizaremos cuáles de ellas son curvatura adaptada. Por último, si el tiempo lo permite, estudiaremos el concepto de curvatura adaptada en contextos más generales que el homogéneo.

Referencias

- [1] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez and T. Otero (2023). Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type and higher rank, *Adv. Math.* 428, Paper No. 109165, 33 pp.
- [2] I. Solonenko, V. Sanmartín-López (2025). Classification of cohomogeneity-one actions on symmetric spaces of noncompact type, *preprint*, arxiv.org/abs/2501.05553.

Ecuaciones de campo de Einstein en espacio-tiempos con densidad

Miguel Brozos Vázquez, Diego Mojón Álvarez

CITMAga, Departamento de Matemáticas, Universidade da Coruña

miguel.brozoz.vazquez@udc.es

En un espacio-tiempo dotado de una función de densidad $(M, g, e^{-f} d\text{vol}_g)$, introducimos ecuaciones de campo ponderadas que recuperan las ecuaciones de campo de Einstein cuando la densidad es constante [1]. Veremos que estas ecuaciones caracterizan espacio-tiempos con densidad que son puntos críticos de un cierto funcional y reproducen las principales características de las ecuaciones de campo de Einstein [2].

Una vez hayamos motivado las ecuaciones, haremos un recorrido por distintos tipos de soluciones, evidenciando importantes diferencias entre aquellas con ∇f nulo (isotrópicas) y ∇f espacial o temporal (no isotrópicas) [1]. Además, pondremos especial énfasis en soluciones cuyo tensor de Weyl satisface alguna propiedad, dando la clasificación de soluciones localmente conformemente llanas y con tensor de Weyl armónico en dimensión cuatro [2].

Referencias

- [1] M. Brozos-Vázquez, D. Mojón-Álvarez (2022). Vacuum Einstein field equations in smooth metric measure spaces: the isotropic case. *Class. Quantum Grav*, 39, No. 13, Article ID 135013, 20 p.
- [2] M. Brozos-Vázquez, D. Mojón-Álvarez (2025). The vacuum weighted Einstein field equations. *Math. Z.*, 310, No. 3, 38 p.

Inmersiones isométricas de superficies en grupos de Lie métricos unimodulares

José M. Manzano, I. Castro, José S. Santiago

Departamento de Matemáticas, Universidad de Jaén

jmprego@ujaen.es

Se discutirán las ecuaciones fundamentales que debe cumplir una inmersión isométrica de una superficie Riemanniana en un grupo de Lie unimodular tridimensional provisto de una métrica Riemanniana invariante a izquierda. Esto nos permitirá abordar dos problemas: el primero será determinar hasta qué punto la aplicación de Gauss invariante a izquierda determina la inmersión isométrica y el segundo discutir bajo qué supuestos existe una correspondencia de tipo Lawson para superficies de curvatura media constante en grupos de Lie métricos unimodulares. También se comentará cómo algunos de estos resultados se extienden al caso semirriemanniano [1].

Referencias

- [1] I. Castro, J. M. Manzano, J. S. Santiago (2025). Isometric immersions into semi-Riemannian three-dimensional unimodular metric Lie groups. *Preprint*.

Hacia el problema de Bernstein para superficies mínimas en Sol_3 mediante una correspondencia con AdS^3

Andrea Del Prete, José Miguel Manzano Prego, José Santiago Santiago Vilanueva

Dipartimento di Matematica “Felice Casorati”, Università degli Studi di Pavia

andrea.delprete@unipv.it

Sol_3 es uno de los ocho modelos de geometría de Thurston; se trata de un grupo de Lie tridimensional con métrica invariante a izquierda, curvatura negativa variable y grupo de isometrías de dimensión 3. Por otro lado, AdS^3 (espacio anti-de Sitter tridimensional) es un espacio lorentziano de curvatura constante negativa, cuyo grupo de isometrías tiene dimensión 6.

En ambos espacios es natural estudiar superficies que son puntos críticos del funcional área: mínimas en Sol_3 , y maximales en AdS^3 . Una conexión entre ambas teorías está proporcionada por una *correspondencia de Calabi generalizada*, [1, Theorem 3.1], que asocia grafos mínimos enteros en Sol_3 con grafos maximales enteros definidos sobre un modelo no completo de AdS^3 , preservando la estructura conforme de las superficies.

En esta charla se presentarán los distintos modelos geométricos que describen Sol_3 y AdS^3 , y se describirán sus isometrías. Se analizará qué isometrías de AdS^3 se conservan mediante la correspondencia y cuáles se pierden, y cómo estas diferencias influyen en la geometría de los grafos mínimos en Sol_3 . Se ilustrarán estos fenómenos mediante ejemplos concretos.

Estos resultados constituyen un primer paso hacia la resolución del *problema de Bernstein* para superficies mínimas en Sol_3 , y abren una vía prometedora para su futura clasificación global.

Referencias

- [1] A. Del Prete, H. Lee, J. M. Manzano (2024). A duality for prescribed mean curvature graphs in Riemannian and Lorentzian Killing submersions. *Math. Nachr.*, 297(5), 1581–1600. <https://doi.org/10.1002/mana.202300282>

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con José Miguel Manzano Prego y José Santiago Santiago Vilanueva de la Universidad de Jaén. Proyecto parcialmente financiado por el proyecto PRIN “Geometry and topology of manifolds” no. F53D23002800001 y por el proyecto MCIN/AEI PID2022-142559NB-I00.

Propiedades genéricas de las superficies mínimas

Antonio Alarcón, Francisco J. López

Departamento de Geometría y Topología e Instituto de Matemáticas (IMAG), Universidad de Granada

alarcon@ugr.es

Discutiremos algunas propiedades de las superficies mínimas en el espacio Euclídeo que ocurren de forma genérica en el sentido de la categoría de Baire. Trabajo [1] en colaboración con Francisco J. López.

Con más precisión, sea M una superficie de Riemann abierta y $n \geq 3$ un número entero. Hablaremos de algunas propiedades genéricas (en el sentido anterior) en el espacio de todas las inmersiones mínimas conformes $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ dotadas de la topología compacta-abierta, señalando que una inmersión genérica de este tipo es caótica en muchos aspectos. Por ejemplo, mostramos que una inmersión mínima conforme genérica $u: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ es no-propia, casi propia, y g -completa con respecto a cualquier métrica Riemanniana dada g en $\mathbb{R}^n$. Además, su imagen $u(M)$ es densa en $\mathbb{R}^n$ y disjunta de $\mathbb{Q}^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$, y tiene área infinita, curvatura total infinita, y curvatura ilimitada en cada conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. En el caso $n = 3$, también demostramos que una inmersión mínima conforme genérica $M \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene índice de estabilidad infinito en cada conjunto abierto en $\mathbb{R}^3$.

Referencias

- [1] A. Alarcon, F. J. Lopez (2024). Generic properties of minimal surfaces, *preprint*, arxiv.org/abs/2412.11563.

Stable and isoperimetric regions for the free boundary problem in bounded annuli of revolution with increasing Gauss curvature

Antonio Cañete

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

antonioc@us.es

In this work, we will study the stable and isoperimetric regions in symmetric bounded annuli of revolution with boundary and with increasing Gauss curvature from the shortest parallel, when considering the free boundary problem. In particular, we will show that isoperimetric solutions may be of several different types.

Agradecimientos. Trabajo parcialmente financiado por el proyecto PID2023-151060NB-I00, concedido por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades.

Normal homogeneous spaces with positive 2-intermediate Ricci curvature

*Miguel Domínguez-Vázquez, Jason DeVito, David González-Álvaro and
Alberto Rodríguez-Vázquez*

Departamento de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela

miguel.dominguez@usc.es

A normal metric on a compact homogeneous space G/H is a homogeneous metric on G/H induced by a bi-invariant metric on G . In 1961, M. Berger [1] gave a classification of the homogeneous spaces whose normal metrics are positively curved. In 1999, B. Wilking [3] found a missing example in Berger's classification. A generalization of positive sectional curvature is given by the notion of positive 2-intermediate Ricci curvature. This notion requires that the sum of the sectional curvatures of any pair of planes sharing a common vector is positive.

In this talk, I will report on an ongoing joint work [2] with Jason DeVito, David González-Álvaro and Alberto Rodríguez-Vázquez where we classify the compact homogeneous spaces admitting a normal metric with positive 2-intermediate Ricci curvature.

References

- [1] M. Berger (1961). Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (3) 15, 179–246.
- [2] J. DeVito, M. Domínguez-Vázquez, D. González-Álvaro, A. Rodríguez-Vázquez (2025). Positive Ric_2 curvature on products of spheres and their quotients via intermediate fatness, *preprint*, arxiv.org/abs/2410.18846.
- [3] B. Wilking (1999). The normal homogeneous space $(\text{SU}(3) \times \text{SO}(3))/\text{U}^\bullet(2)$ has positive sectional curvature, *Proc. Amer. Math. Soc.* 127, no. 4, 1191–1194.

Flujos de curvatura con restricciones en superficies Hadamard pinzadas

Albert-Niclòs, Sara; Cabezas-Rivas, Esther

Departamento de Matemáticas. Universidad de Valencia

sara.albert@uv.es

En esta charla exploraremos la evolución de curvas cerradas y convexas mediante constrained curvature flows en superficies de Hadamard con curvatura pinzada. Resulta el siguiente paso natural tras los resultados en dimensión superior en el espacio hiperbólico [1, 2]. En primer lugar veremos que, bajo hipótesis muy generales, las soluciones existen para todo tiempo y la curvatura acaba estabilizándose en un valor límite.

Después nos centraremos en el caso del area-preserving curve shortening flow. Supondremos que la superficie es rotacionalmente simétrica y que la curvatura gaussiana decrece radialmente. Bajo estas condiciones, y partiendo de una curva convexa con un área inicial dada, la dinámica del flujo fuerza a las curvas a aproximarse exponencialmente a un círculo geodésico centrado en el polo.

Referencias

- [1] E. Cabezas-Rivas and V. Miquel (2007). Volume preserving mean curvature flow in the hyperbolic space, *Indiana Univ. Math. J.*, 56, no. 5, 2061–2086.
- [2] Y. Wei and B. Yang (2018) Volume Preserving Flows for Convex Curves and Surfaces in the Hyperbolic Space, *J. Differential Equations*, 264, no. 2, 1220–1251.

Rigidez y flexibilidad isométrica en espacios de Wasserstein

Jaime Santos-Rodríguez, Mauricio Che, Fernando Galaz-García, Martin Kerin

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Madrid

jaime.santos@upm.es

La teoría de transporte óptimo ha sido usada para modelar diversos fenómenos tanto dentro de las matemáticas como en otras ciencias. En esta charla nos centraremos en los aspectos más geométricos de la teoría, específicamente en las simetrías de un espacio de Wasserstein.

Dado un exponente $p \in [1, \infty)$ y un espacio métrico (X, d) , el espacio L^p -Wasserstein sobre X consiste en el espacio de medidas de probabilidad con p -momento finito, $\mathbb{P}_p(X)$, dotado con una distancia inducida por las soluciones al problema de transporte de Kantorovich con coste $c(x, y) = d^p(x, y)$. Diremos que un espacio (X, d) es isométricamente rígido cuando el grupo de isometrías de $\mathbb{P}_p(X)$ es isomorfo al de X ; en otro caso, diremos que es isométricamente flexible.

En general, determinar la rigidez/flexibilidad de un espacio (X, d) depende tanto de la geometría como del exponente p (véase por ejemplo [1, 3, 4]). En esta charla primero daremos una visión general de la geometría de los espacios de Wasserstein para luego hablar de distintas construcciones naturales en las que podremos observar tanto rigidez como flexibilidad isométrica [2].

Referencias

- [1] J. Bertrand, B. R. Kloeckner (2016). A geometric study of Wasserstein spaces: isometric rigidity in negative curvature. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 5, pp. 1368—1386.
- [2] M. Che, F. Galaz-García, M. Kerin, J. Santos-Rodríguez (2024). Isometric Rigidity of Metric Constructions with respect to Wasserstein Spaces, *preprint arXiv:2410.14648*.
- [3] G. P. Gehér, T. Titkos, D. Virosztek (2022). The isometry group of Wasserstein spaces: the Hilbertian case. *J. Lond. Math. Soc.* (2) 106.4, pp. 3865—3894.
- [4] J. Santos-Rodríguez (2022). On isometries of compact L^p -Wasserstein spaces. *Adv. Math.* 409, part A, Paper No. 108632.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Mauricio Che, Fernando Galaz-García y Martin Kerin. Proyecto parcialmente financiado por los proyectos MTM 2017–85934–C3–2–P, PID 2021-124195NB-C32 del Ministerio de Economía y Competitividad de España y un contrato Margarita Salas CA1/RSUE/2021-00625.

Capillary Surfaces and an Overdetermined Problem in the Sphere

Alberto Cerezo, Isabel Fernández, Pablo Mira

Universidad de Granada

cerezocid@ugr.es

In this talk, we will review the theory of capillary minimal surfaces in the ball and its relation to the following overdetermined problem for the first eigenvalue of the Laplacian on the sphere:

$$\begin{cases} \Delta u + 2u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = a, \quad \partial_n u = b & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

Here, Ω is a domain in the 2-sphere, $a, b \in \mathbb{R}$ are constants, and ∂_n denotes the partial derivative in the direction of the exterior unit normal to Ω .

In 1985, Nitsche asked whether every embedded capillary minimal annulus in the ball must be rotational. We will answer this question in the negative. More specifically, we will construct a countable number of one-parameter families of such surfaces.

Using their Gauss map, we will show that these examples lead to (non-rotational) ring-type domains $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ for which the overdetermined problem (1) admits a positive solution. This disproves a conjecture by Souam in 2005.

Sesión especial 7

Didáctica de las Matemáticas en la Universidad

Equipo organizador:

- *Salvador Llinares* (Universidad de Alicante)
- *Núria Planas* (Universitat Autònoma de Barcelona - SEIEM)
- *Irene Ferrando* (Universitat de València - Comisión Educación RSME)

Descripción

Esta sesión tiene como propósito contribuir al diálogo entre la comunidad matemática y la investigación en didáctica de la matemática, mediante la presentación de estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario. A través de ejemplos de investigaciones se muestran algunas características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática en relación a las matemáticas en el nivel universitario.

Los focos de las investigaciones se centran en el papel de la modelación, el uso de recursos digitales, el papel de la demostración en las carreras científico-técnicas, el uso de modelos de aprendizaje para caracterizar el aprendizaje de los estudiantes universitarios (geometría y topología), y las características de la forma de justificar en las tareas matemáticas por parte de los estudiantes que acceden a las carreras científicas.

Palabras clave: Didáctica de las Matemáticas; Educación Superior; Modelización; Demostración

Programa

MARTES, 20 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:30 | Verónica Martín-Molina (Universidad de Sevilla)
<i>Breve panorámica de investigaciones centradas en la didáctica de las matemáticas a nivel universitario</i> |
| 11:30 – 12:00 | Matías Camacho (Universidad de la Laguna)
<i>Investigaciones sobre la formación matemática de los estudiantes universitarios. Nuevos retos que surgen de la emergencia de la tecnología</i> |
| 12:00 – 12:30 | Francisco J. Boigues Planes (Universitat Politècnica de València)
<i>La noción de Justificación en los exámenes de las PAU en matemáticas II</i> |
| 15:30 – 16:00 | María Burgos (Universidad de Granada)
<i>La demostración matemática: Potencialidad y desafíos en la formación de estudiantes de carreras científico-técnicas</i> |
| 16:00 – 16:30 | Víctor Manero (Universidad de Zaragoza)
<i>Aprendizaje de la geometría y topología a nivel universitario a través del modelo de Van Hiele. Implicaciones para la docencia</i> |
| 16:30 – 17:00 | Adrián Bacelo (Universidad Complutense de Madrid)
<i>Caracterizar el Pensamiento Computacional y Algorítmico en Educación Matemática universitaria</i> |

Breve panorámica de investigaciones centradas en la didáctica de las matemáticas a nivel universitario

Verónica Martín-Molina

Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla

veronicamartin@us.es

Los objetivos principales de la didáctica de las matemáticas incluyen tanto la investigación *pura*, orientada a comprender la naturaleza del pensamiento, el aprendizaje y la enseñanza matemáticos, como la investigación *aplicada*, centrada en mejorar la enseñanza de las matemáticas [3]. Este autor también señala que esta disciplina no ofrece respuestas definitivas a preguntas como “¿Qué funciona?”, ya que las respuestas dependen de lo que se valore y se quiera conseguir. A diferencia de la investigación en matemáticas, que puede tener siglos de antigüedad, la didáctica de las matemáticas es una disciplina relativamente nueva, con solo algunas décadas de existencia, y sus resultados raramente son concluyentes.

En esta comunicación, se pretende presentar una breve panorámica de investigaciones puras y aplicadas centradas en la didáctica de las matemáticas a nivel universitario. Se mostrarán principalmente estudios en los que los participantes son matemáticos o estudiantes del grado en matemáticas. Asimismo, se explorará cómo dichas investigaciones pueden ayudar a mejorar la enseñanza de las matemáticas en la universidad. Finalmente, se reflexionará sobre el hecho de que, aunque existe un creciente número de estudios en este ámbito, aún queda mucho por investigar. Uno de los principales retos es cómo lograr que los resultados de estas investigaciones lleguen de manera efectiva al aula universitaria y cómo generar instancias de transferencia eficientes de la investigación a la docencia [1]. Para ello, la colaboración entre profesores universitarios de matemáticas e investigadores en didáctica de las matemáticas es fundamental [2].

Referencias

- [1] M. Camacho-Machín, J. Perdomo-Díaz, R. Trujillo-González (2022). Matemáticas en la Universidad, en L. J. Blanco Nieto, N. Climent Rodríguez, M. T. González Astudillo, A. Moreno Verdejo, G. Sánchez-Matamoros García, C. de Castro Hernández, C. Jiménez Gestal, editores, *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática*, Universidad de Granada, 224–259.
- [2] E. Nardi (2008). *Amongst mathematicians: Teaching and learning mathematics at university level*. Springer.
- [3] A. H. Schoenfeld (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the AMS*, 47(6), 641–649.

Agradecimientos. Este trabajo se ha realizado en el contexto del Proyecto PID2022-139079NB-I00, financiado por MICIU/AEI/<https://doi.org/10.13039/501100011033> y por FEDER/UE.

Investigaciones sobre la formación matemática de los estudiantes universitarios. Nuevos retos que surgen de la emergencia de la tecnología

Matías Camacho-Machín, Rodrigo Trujillo

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna

mcamacho@ull.es

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) ha puesto el foco en el aprendizaje las matemáticas en el ámbito universitario desde hace bastantes años. En el simposio de la SEIEM de 2021, se desarrolló el Seminario de Investigación “La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la Universidad”.

En una de las ponencias, se presentó una agenda de investigación que recogía diferentes aspectos a tener en cuenta en la investigación para mejorar la formación matemática en la educación superior (Camacho-Machín, 2021). El informe incide en la importancia de potenciar los estudios centrados en la enseñanza y aprendizaje en las ingenierías y otras ciencias que requieran una formación matemática diferente a la de los matemáticos. Concretamente, considera necesario dar un impulso a la investigación en modelización matemática analizada desde perspectivas no epistemológicas, así como estudiar el campo afectivo, incluyendo las creencias y concepciones de estudiantes y docentes sobre las matemáticas y su la enseñanza. También destaca la importancia del uso de tecnologías digitales. Se destaca la importancia de la demostración y la prueba, aspectos cada vez más relegados en los cursos de matemáticas en Ingenierías y Ciencias. Casi cinco años después, los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas siguen siendo clave para los resultados académicos, la satisfacción de los distintos actores (profesorado, alumnado, administración, familias) y los indicadores de calidad del sistema educativo (PISA, rankings, etc.).

En esta ponencia se reflexionará sobre los resultados de la investigación en Didáctica de la Matemática a nivel universitario de los últimos 30 años. Se presentarán algunas de las dificultades que emergen en la transición desde el Bachillerato a la Universidad (afrontando tasas de abandono del 33 %), que se relacionan principalmente con: la brecha entre la formación y competencias con las que llega el alumnado de Bachillerato y la poca/nula adaptación de los grados a ese punto de partida, adaptación de contenido, las metodologías empleadas en los cursos pre-universitarios. Se estudiará la necesidad de abordar el impacto que las tecnologías digitales, en particular la Inteligencia Artificial generativa y los Sistemas de Geometría Dinámica, podrían tener en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La modelización matemática y la resolución de problemas matemáticos constituyen los ejes en los que fundamentamos la discusión, se mostrarán ejemplos de actividades para la enseñanza de conceptos matemáticos propios del ámbito universitario adaptados de investigaciones en las que han participado los autores.

Referencias

- [1] M. Camacho-Machín (2021). Agenda de Investigación para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en el Nivel Universitario. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV*, SEIEM, 33–48.

La noción de Justificación en los exámenes de las PAU en matemáticas II

Francisco J. Boigues Planes, Valentín Gregori Gregori, Abilio Orts Muñoz

Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

fraboipl@mat.upv.es

Las últimas legislaciones en el campo de la educación secundaria apuntan hacia una enseñanza de las matemáticas que fomente la competencia matemática. Un concepto que tiene muchas aristas y puntos de vista, pero de manera inequívoca, englobaría la capacidad de fomentar en los estudiantes la justificación de sus tareas matemáticas. No es suficiente que los estudiantes aprendan de manera automática una serie de problemas estándar. El profesorado debe impulsar que los estudiantes expliquen el por qué de sus realizaciones matemáticas. El trabajo que estamos realizando un grupo de profesores del departamento de matemática aplicada en la UPV, en colaboración con profesores de secundaria, desde hacer varios años, a partir de las realizaciones en los exámenes de la PAU (cerca de 800 estudiantes) nos ha permitido llegar a determinadas conclusiones que podrían mejorar la enseñanza de las matemáticas: a) Uso no correcto del lenguaje matemático; b) Las dificultades de usar calculadoras de manera coherente con lo pedido en una tarea; c) La falta de definición cuando se introducen variables en la resolución de ejercicios; d) No explicitar los pasos que han seguido para llegar a una conclusión cuando están resolviendo un problema. Si el profesor trabaja esta competencia: “la justificación”, seguro que ayudaremos a que nuestros alumnos aprendan mejor las matemáticas.

La demostración matemática: Potencialidad y desafíos en la formación de estudiantes de carreras científico-técnicas

María Burgos, Bettina Milanesio

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

mariaburgos@ugr.es

La demostración matemática desempeña un papel central en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, no solo por su presencia transversal y longitudinal en la disciplina, sino también por su contribución en el desarrollo de la comprensión profunda y dominio de las matemáticas. Sin embargo, cómo enseñarla y cómo se produce su aprendizaje continúa siendo un reto tanto para los investigadores como para los propios profesores. Esto motiva el interés por analizar cómo progresan los estudiantes en la elaboración de demostraciones cuando reciben formación específica. Con este interés, en esta comunicación describimos los resultados de dos intervenciones formativas realizadas con estudiantes de primer curso universitario cuando resuelven situaciones que involucran la conjetura y la demostración de propiedades matemáticas. Una de ellas se llevó a cabo con estudiantes argentinos de los grados en Física y Matemáticas en el contexto de la aritmética entera; la otra, con estudiantes españoles del grado en Estadística, en el marco de una asignatura de álgebra básica. En ambos casos, las intervenciones se desarrollaron de manera colaborativa entre las investigadoras y los profesores responsables de las asignaturas, atendiendo tanto a los objetivos de la investigación como a las orientaciones planteadas por los docentes. Para llevar a cabo los análisis de las prácticas demostrativas desarrolladas por los estudiantes, adoptamos un enfoque metodológico cualitativo, en el que articulamos el modelo de Toulmin – o la ampliación de este modelo propuesta por Knipping y Reid, si la complejidad de la estructura argumentativa lo requiere – con herramientas del Enfoque ontosemiótico. En concreto, analizamos el grado de pertinencia en sus respuestas, los objetos y procesos implicados en las demostraciones que desarrollan y los niveles de formalización logrados. Esta articulación nos permite alcanzar una visión más profunda de las competencias de los estudiantes con la demostración y las dificultades que encuentran con este proceso. De manera general, los resultados de ambas intervenciones formativas muestran diversos tipos de dificultades al inicio de su formación universitaria. Estas dificultades están vinculadas principalmente al uso de estrategias argumentativas informales, que no permiten validar las conjeturas emergentes o proposiciones matemáticas implicadas, así como un uso inadecuado de las propiedades matemáticas disponibles o reglas lógicas en la construcción de demostraciones. Tras una formación en la que la demostración se convierte en parte esencial de la práctica docente, la mayoría de los estudiantes logró avanzar en la comprensión y el desarrollo de demostraciones con un mayor nivel de formalización. Se concluyen aspectos claves de ambas intervenciones formativas que contribuyeron a estos logros, destacando la importancia de seguir explorando posibles intervenciones que integren las recomendaciones derivadas de la investigación, con el fin de promover oportunidades de aprendizaje significativo con la demostración.

Aprendizaje de la geometría y topología a nivel universitario a través del modelo de Van Hiele.

Implicaciones para la docencia

Víctor Manero, Alberto Arnal-Bailera

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

vmanero@unizar.es

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (Van Hiele, 1986) establece cinco niveles de desarrollo, desde el nivel 1 (visual) hasta el nivel 5 (rigurosidad). A pesar de que este modelo ha sido ampliamente estudiado, existen pocas investigaciones que aborden el quinto nivel. En esta comunicación mostramos una trayectoria investigadora en curso que tiene varios objetivos: estudiar en profundidad los procesos de aprendizaje en Geometría y Topología a nivel universitario, analizar el desarrollo de dichos procesos entre los estudiantes de Grado y obtener implicaciones para la docencia universitaria.

El primer paso ha sido describir este nivel mediante la construcción y validación de una lista de indicadores para cada uno de los procesos involucrados en el razonamiento geométrico (definición, demostración, clasificación e identificación) mediante la metodología Delphi (Linstone y Turoff, 1975). El producto final es una lista de indicadores validados del quinto nivel de razonamiento de Van Hiele para cada proceso. En particular, los procesos de demostración y definición resultaron ser los más relevantes en este nivel (Arnal-Bailera y Manero, 2024). Algunos de los indicadores daban cuenta de la importancia de elegir de forma consciente entre varias definiciones equivalentes en función del trabajo a desarrollar o de ser capaz de estructurar una demostración en partes más pequeñas, como lemas, que podrían ser de utilidad en otros momentos. A partir de la lista de indicadores, se diseñó un cuestionario para medir el grado de adquisición del quinto nivel del modelo de Van Hiele en el proceso de definición (Arnal-Bailera y Manero, en prensa) siguiéndose también una metodología Delphi. A lo largo de este recorrido para desarrollar nuestro conocimiento del nivel 5 de Van Hiele han ido apareciendo algunas ideas que permitirían hacerlo operativo y facilitar el diseño de actividades de enseñanza. Entre otras cuestiones, durante la elaboración de los ítems, se recalca la importancia de realizar tareas de análisis comparativo entre diferentes contextos o sistemas axiomáticos.

Referencias

- [1] A. Arnal-Bailera, V. Manero (2024). A characterization of Van Hiele's level 5 of geometric reasoning using the delphi methodology. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22(3), 537–560.
- [2] A. Arnal-Bailera, V. Manero (2025). Design and Validation of a Questionnaire to Assess the Definition Process at Van Hiele Level 5. In press.
- [3] H. A. Linstone, M. Turoff (1975). *The Delphi method: Techniques and applications*. Addison-Wesley.
- [4] P. M. Van Hiele (1986). *Structure and insight*. Academic Press.

Agradecimientos. Este trabajo se ha realizado en el contexto del grupo S60 _ 23R, con fondos del Gobierno de Aragón financiado por la Comunidad Europea.

Caracterizar el Pensamiento Computacional y Algorítmico en Educación Matemática universitaria

Adrián Bacelo, Inés M. Gómez-Chacón

Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid

abacelo@ucm.es

La investigación que se describe tiene como finalidad identificar conexiones entre el pensamiento computacional y el pensamiento algorítmico en el aprendizaje de las matemáticas.

El objetivo de esta investigación es caracterizar el pensamiento algorítmico en un contexto universitario del Grado en Matemáticas mediante tareas desconectadas. Se presenta un modelo de análisis a través de categorías que establecen conexiones entre espacios de trabajo matemático y algorítmico en tres dimensiones, semiótica, instrumental y discursiva. Los resultados confirman la interacción entre estas dimensiones y su valor predictivo para un mejor rendimiento en programación (Bacelo y Gómez-Chacón, 2023). Así mismo la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático permite trabajar perspectivas y vías sobre el análisis del razonamiento; y las actividades desconectadas se evidencian como una herramienta muy útil para analizar y categorizar el pensamiento algorítmico

Referencias

- [1] A. Bacelo, I. M. Gómez-Chacón (2023). Characterising algorithmic thinking: a university study of unplugged activities. *Thinking skills and creativity*, 48, 101284.

Agradecimientos. Investigación subvencionada por PID2021-122752NB-I00 y PID2022-138325OB-I00, Ministerio de Ciencia MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, EU.

Sesión especial 8

Dinámica Topológica

Equipo organizador:

- *Héctor Barge Yáñez* (Universidad Politécnica de Madrid)
- *Jaime Jorge Sánchez Gabites* (Universidad Complutense de Madrid)

Descripción

La finalidad de esta sesión es ilustrar la variedad de líneas de investigación actuales que involucran aspectos topológicos de los sistemas dinámicos. Así, contiene charlas de temáticas muy variadas cuyo hilo conductor es que la topología juega un papel relevante, bien sea por la naturaleza de los resultados que se obtienen o de las técnicas que se utilizan para obtenerlos.

The purpose of this session is to illustrate the variety of current research lines that involve topological aspects of dynamical systems. The common thread of the talks is the presence of topology, either in the nature of the results that are discussed or as a tool to obtain them.

Palabras clave: Índice de Conley y de punto fijo, atractores, conjuntos de Julia, entropía, helicidad.

Programa

LUNES, 19 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 15:30 – 16:00 | E. Vigil (Universidad de Oviedo)
<i>Aplicaciones lineales a trozos 2-D: ruta hacia la coexistencia de atractores extraños</i> |
| 16:00 – 16:30 | L. Pardo (Universitat de Barcelona)
<i>Transcendental Julia Sets as Cantor bouquets</i> |
| 16:30 – 17:00 | R. Cardona (Universitat de Barcelona)
<i>On Arnold-Keshin's conjecture about flows with fixed helicity</i> |

MARTES, 20 de enero

- | | |
|---------------|---|
| 11:00 – 11:30 | E. Muñoz (Universidad Complutense de Madrid)
<i>Index and bifurcation theory approach for the search of periodic solutions</i> |
| 11:30 – 12:00 | R. Barral (Universidad Politécnica de Madrid)
<i>Mean equicontinuity, flow spaces and foliation theory</i> |
| 12:00 – 12:30 | P. Tópor (Gdansk University of Technology)
<i>Fixed point indices of iterates of smooth boundary-preserving maps</i> |
| 15:30 – 16:00 | P. Oprocha (University of Ostrava)
<i>On entropy in Lebesgue measure preserving maps</i> |
| 16:00 – 16:30 | P. Varandas (Universidade de Aveiro)
<i>Generic homeomorphisms have maximal topological emergence</i> |

Aplicaciones lineales a trozos 2-D: ruta hacia la coexistencia de atractores extraños

E. Vigil

Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo

vigilkike@gmail.com

Las aplicaciones cuadráticas en dimensión uno son, por su complejidad dinámica, fuente de numerosos estudios. En este contexto, destaca especialmente la familia de *aplicaciones logísticas* $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$. Un primer acercamiento al estudio de f_μ se realizó mediante aplicaciones lineales a trozos conocidas como *aplicaciones tienda*.

Si pasamos al plano, la complejidad de las aplicaciones cuadráticas es aún mayor. Siguiendo la idea desarrollada en dimensión uno, en [1] se introdujo una familia de aplicaciones lineales a trozos (*Expanding Baker Maps*) con la que se pretendía empezar a comprender y describir la dinámica de la familia de aplicaciones $T_{a,b} = (a + y^2, x + by)$.

El objetivo de esta charla es exponer las técnicas utilizadas en el estudio de las *Expanding Baker Maps* así como las propiedades obtenidas en los últimos años. Entre otros resultados, y quizá el más destacado, se demostró la coexistencia de atractores extraños bidimensionales mediante un proceso de renormalización ([2],[3]).

Referencias

- [1] A. Pumariño, J. Á. Rodríguez, J. C. Tatjer, E. Vigil (2014). Expanding baker maps as models for the dynamics emerging from 3d-homoclinic bifurcations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 19(2), 523–541.
- [2] A. Pumariño, J. Á. Rodríguez, E. Vigil (2018). Renormalization of two-dimensional piecewise linear maps: Abundance of 2-D strange attractors. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A*, 38(2), 941–966.
- [3] A. Marqués-Lobeiras, A. Pumariño, J. Á. Rodríguez, E. Vigil (2023). Splitting and coexistence of 2-D strange attractors in a general family of Expanding Baker Maps. *Nonlinearity*, 36(8), 4247–4282.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con A. Pumariño y J.A. Rodríguez, además de J.F. Alves, A. Marqués-Lobeiras y J.C. Tatjer. Proyecto parcialmente financiado por PID2023-147461NB-I00.

Transcendental Julia Sets as Cantor bouquets

Leticia Pardo Simón

Departamento de Matemáticas e Informàtica, Facultat de Matemàtiques i Informàtica,
Universitat de Barcelona

lpardosimon@ub.edu

In the study of the dynamics of transcendental entire functions, a central object of interest is the Julia set, which is the locus of chaotic behaviour under iteration. For many such functions, the Julia set consists of unbounded curves that escape to infinity and collectively form a Cantor bouquet: a topological structure ambiently homeomorphic to a straight brush. In this talk, we present examples of such phenomena and discuss criteria that ensure the Julia set takes this form. This is based on joint work with Lasse Rempe.

On Arnold-Khesin's conjecture about flows with fixed helicity

Robert Cardona

Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona

robert.cardona@ub.edu

In the study of volume-preserving vector fields in three-dimensional manifolds, a topic tightly related to hydrodynamics, a very important notion is that of helicity. It is an invariant of these fields, with a topological interpretation, that exhibits some surprising uniqueness properties. Arnold and Khesin asked in 1992 whether certain sets of volume-preserving flows could be somewhere dense in the set of flows with a given value of helicity, conjecturing later that this might be the case for “some topology”. After introducing this conjecture, we will show that it is false if the chosen topology is a very natural one in this context: the C^1 -topology. This is based on joint work with Julian Chaidez (University of Southern California) and Francisco Torres de Lizaur (Universidad de Sevilla).

Acknowledgments. RC acknowledges partial support from the AEI grant PID 2023-147585NA-I00, the Departament de Recerca i Universitats de la Generalitat de Catalunya (2021 SGR 00697), and the Spanish State Research Agency, through the Severo Ochoa and María de Maeztu Program for Centers and Units of Excellence in R&D (CEX2020-001084-M).

Index and Bifurcation Theory approach for the search of periodic solutions

Eduardo Muñoz Hernández

Departamento de Matemática Aplicada y Análisis Matemático, Universidad Complutense de Madrid

eduardmu@ucm.es

In this talk, we present two approaches to analysing the existence and multiplicity of periodic solutions in planar Hamiltonian periodic problems. Firstly, we characterise the Conley–Zehnder index in terms of the winding number in order to apply a suitable version of the Poincaré–Birkhoff theorem. Secondly, we adopt a less well-studied approach, analysing some eigenvalue algebraic multiplicities to establish local and global bifurcation results in the sense of Rabinowitz. The results presented in this talk have been obtained in collaboration with A. Boscaggin (University of Turin), J. C. Sampedro (UPM) and A. Tellini (UPM).

Mean equicontinuity, flows spaces and foliation theory

Ramón Barral Lijó

Departamento de Matemática Aplicada a las TIC, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos, Universidad Politécnica de Madrid

ramon.barral@upm.es

The concept of mean equicontinuity is undoubtedly one of the most important areas of research in dynamical systems theory, lying at the intersection of topological and measure theory. In this talk, we will study this concept for flow spaces—that is, one-dimensional compact metric spaces admitting a fixed-point-free action of the real line—, where there is a strong correlation between topology and the possible dynamics. In order to do that, we will use equicontinuous laminations as topological substitutes for the role played by maximal equicontinuous factors in the category of group actions.

Fixed point indices of iterates of smooth boundary-preserving maps

Patryk Tópor

Doctoral School, Faculty of Applied Physics and Mathematics, Gdansk University of Technology

patryk.topor@pg.edu.pl

Let us consider a smooth manifold M with a non-empty boundary ∂M . For a smooth map f that preserves ∂M and a fixed point $x_0 \in \partial M$, we determine all possible forms of the pairs of sequences of fixed point indices of iterates

$$(\text{ind}(f^n, x_0), \text{ind}(\bar{f}^n, x_0))_n,$$

where $\bar{f}$ denotes the restriction of f to ∂M . As an application of our result, we compute in some cases the Nielsen-type invariant $D_r(f; M, \partial M)$, which is equal to the minimal number of r -periodic points among all maps preserving ∂M and smoothly homotopic to f . This is a joint work with Grzegorz Graff and Jerzy Jezierski.

On entropy in Lebesgue measure preserving maps

Piotr Oprocha

University of Ostrava

oprocha@icloud.com

The aim of this talk is to provide some insight into continuous maps of the interval which preserve the Lebesgue measure. Except for the identity map or $1 - id$ all such maps have topological entropy at least $\log 2/2$. Generically they have infinite topological entropy, are topologically mixing and Lebesgue measure is weakly mixing. In this talk we will present further topological properties of maps in this class and confront them with metric entropy. (Joint work with Jozef Bobok, Jernej Cinc and Serge Troubetzkoy)

Generic homeomorphisms have maximal topological emergence

P. Varandas

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

pcvarand@gmail.com

Homeomorphisms on compact manifolds have a very complex dynamical behavior and, in particular, have infinite topological entropy. In this case, a refinement of the complexity can be measured through the topological emergence of the homeomorphism. In this talk I will discuss some recent results on the topological emergence of typical homeomorphisms, namely that the topological emergence of a C^0 -generic homeomorphism is maximal, equal to the dimension of the manifold.

Sesión especial 9

Divulgación de las matemáticas

Equipo organizador:

- *Julio Mulero* (Universidad de Alicante)
- *Mariola Molina* (Universidad de Alicante)

Descripción

La divulgación de las matemáticas constituye una herramienta fundamental para promover una comprensión más profunda y accesible de esta disciplina, tradicionalmente percibida como abstracta o inaccesible. La traducción de conceptos técnicos a un lenguaje más comprensible sin sacrificar su rigor permite el desarrollo del pensamiento lógico y crítico, fomenta el interés por las ciencias exactas y permite una participación ciudadana más informada en contextos donde el análisis cuantitativo es esencial. Ahora más que nunca, la sociedad requiere el fortalecimiento de la cultura científica donde las matemáticas jueguen un papel central y se consoliden como un puente entre el conocimiento especializado y la sociedad en general. En esta sesión especial, de la mano de expertos y expertas en divulgación matemática de gran prestigio, trataremos de inspirar y evidenciar diferentes estrategias divulgativas que abran las puertas de las matemáticas a la sociedad del futuro.

Palabras clave: Divulgación matemática; Cultura matemática; Alfabetización matemática.

Programa

JUEVES, 22 de enero

- | | |
|---------------|---|
| 11:00 – 11:30 | Eduardo Sáenz de Cabezón (Universidad de La Rioja)
<i>Un matemático va al supermercado</i> |
| 11:30 – 12:00 | Anabel Forte (Universidad de Valencia)
<i>Estas sí, estas no. Selección de variables para un mundo mejor</i> |
| 12:00 – 12:30 | Angélica Benito (Universidad Autónoma de Madrid)
<i>En las distancias cortas es donde las matemáticas se la juegan</i> |
| 12:30 – 13:00 | Julio Mulero (Universidad de Alicante)
<i>Houston, tenemos muchos problemas</i> |

VIERNES, 23 de enero

- | | |
|---------------|---|
| 11:30 – 12:00 | Fernando Blasco (Universidad Politécnica de Madrid)
<i>Conceptos complicados que se simplifican al usar una baraja</i> |
| 12:00 – 12:30 | Gema Quintana (IES Marqués de Santillana, Centro Asociado de la UNED en Cantabria)
<i>No eres tú. Son las mates...</i> |
| 12:30 – 13:00 | Santi García Cremades (Universidad Miguel Hernández de Elche)
<i>Cuando las matemáticas suenan bien</i> |

Un matemático va al supermercado

Eduardo Sáenz-de-Cabezón

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

esaenz-d@unirioja.es

Desde que una persona camina hacia el supermercado con la intención de hacer la compra hasta que sale después de pagar, cada pequeña o gran acción que realiza está relacionada de uno u otro modo con las matemáticas. En esta charla haremos un repaso a problemas sencillos y difíciles, a cuestiones históricas o sorprendentes que surgen con ocasión de la visita de un matemático al supermercado.

Estas sí, estas no. Selección de variables para un mundo mejor

Anabel Forte

Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Valencia

anabel.forte@uv.es

En la era de la información se recogen datos en todas partes, a todas horas. Cientos de variables observadas que pueden ser la clave para entender mejor procesos que van desde la probabilidad de desarrollar una enfermedad al estudio de la exclusión financiera; desde la comprensión de que variables hacen el medio más “apetecible” para ciertas especies a cuales son las que marcan el nivel cognitivo en la infancia. En todos estos contextos, existen ciertas técnicas estadísticas conocidas como de reducción de la dimensionalidad o de selección de variables que suponen una herramienta indispensable. Si me dejas, te cuento de forma sencilla cómo estas técnicas aprovechan el poder de las matemáticas y la probabilidad para decidir qué variables sí y qué variables no, están detrás de aquello que nos importa.

En las distancias cortas es donde las matemáticas se la juegan

Angélica Benito, Ana Granados

Departamento de Didácticas Específicas, Universidad Autónoma de Madrid

angelica.benito@uam.es

Desde el colegio aprendemos que “la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta” sin cuestionarnos por qué (tendremos que esperar a llegar a la universidad para ver una demostración de este hecho usando cálculo de variaciones). En esta charla veremos que esta afirmación tan categórica no siempre es verdad y que depende mucho de las condiciones en las que nos encontremos y en el mundo en el que vivamos. Es en este contexto donde las matemáticas se la juegan...

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Ana Granados.

Houston, tenemos muchos problemas

Julio Mulero

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

julio.mulero@ua.es

Las matemáticas constituyen una herramienta esencial en la construcción del mundo que habitamos. Más allá de su dimensión abstracta, forman parte del andamiaje invisible que sostiene nuestra vida cotidiana: desde la tecnología y la economía, hasta la medicina, la ingeniería o la inteligencia artificial. No es casualidad que los grandes desafíos a los que nos enfrentamos como sociedad requieran una comprensión profunda y rigurosa del lenguaje matemático. A lo largo de la historia, las matemáticas han sido, en muchas ocasiones, la llave maestra que ha abierto puertas al progreso, al conocimiento e incluso a la resolución pacífica de conflictos. En esta conferencia repasaremos algunos de estos momentos clave, conoceremos a algunos de sus protagonistas y reflexionaremos sobre cómo y por qué las matemáticas siguen siendo imprescindibles para construir un futuro más justo.

Conceptos complicados que se simplifican al usar una baraja

Fernando Blasco

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Madrid

fernando.blasco@upm.es

En esta charla expondremos cómo la magia matemática es una fuente estupenda de ejemplos que sirven para ilustrar conceptos más complicados. La aritmética modular, los sistemas de numeración, ideas de topología o nociones sobre códigos son objetos matemáticos que frecuentemente se entienden mejor acompañados de juegos. Pero, saliéndose de nuestra disciplina, podemos hablar de la “carta cuántica” o de la paradoja de los pares EPR. El público general quiere saber cómo funcionan los juegos de magia. Normalmente no es lícito revelar el secreto, pero sí si la finalidad es buena y eso ocurre cuando el secreto es un secreto matemático.

No eres tú. Son las mates...

Gema R. Quintana

IES Marqués de Santillana - Centro Asociado de la UNED en Cantabria

grquintana5@educantabria.es

A los que nos dedicamos a las matemáticas nos ocurre un curioso fenómeno: no dejamos de escuchar “confesiones”. Está pasando. En el momento en que nos presentan, el oyente siente la imperiosa necesidad de comentarnos cómo es su relación con las matemáticas y justificar el porqué de la misma. Las causas y las razones que nos proporcionan son diversas. Nos proponemos analizar el origen de este fenómeno. ¿Estamos preparados para mejorar nuestra relación con las matemáticas?

Cuando las matemáticas suenan bien

Santi García-Cremades

Departamento Estadística, Matemáticas e Informática, Universidad Miguel Hernández de Elche

jose.garciac@umh.es

Desde que Pitágoras escuchó los martillos de una forja, la música y las matemáticas han compartido una armonía profunda, a veces escondida entre frecuencias, proporciones y silencios. En esta charla trazaremos un recorrido desde los orígenes de la teoría musical hasta los algoritmos que hoy dominan la música comercial, con paradas en conceptos como la coma pitagórica, las escalas temperadas, la proporción áurea en la estructura musical y el uso del azar matemático como herramienta creativa. Veremos cómo Mozart componía minuetos con dados, cómo Bach cifraba mensajes numéricos en sus obras, o cómo las progresiones armónicas del pop actual responden a patrones muy previsibles. Una historia de compases, algoritmos, simetrías y sorpresas donde las matemáticas no son solo un lenguaje: son música que aún no hemos aprendido a escuchar del todo.

Sesión especial 10

EDPs: problemas no lineales y aplicaciones

Equipo organizador:

- *José C. Sabina de Lis* (Universidad de La Laguna)
- *Sergio Segura de León* (Universitat de València)

Descripción

En la sesión se aborda una panorámica actual de la investigación matemática española en el campo de las ecuaciones diferenciales. Naturalmente el énfasis se centra en ecuaciones en derivadas parciales elípticas y parabólicas. La temática propuesta comprende una gran variedad de temas, como se puede comprobar por los títulos y resúmenes de las comunicaciones.

Conviene señalar que la propuesta reúne un plantel de investigadores tanto noveles como de reconocida experiencia en el campo de las ecuaciones no lineales. Se abarca asimismo una muestra representativa de los diversos grupos y centros de investigación del país.

Esperamos que la sesión genere un foro de discusión que dé impulso a nueva investigación en la disciplina.

Palabras clave: ecuaciones no lineales; dinámica de poblaciones; fenómenos de concentración; difusión lineal y no lineal; exponentes críticos y desarrollo de singularidades.

Programa

LUNES, 19 de enero

- 15:30 – 16:00 Fernando Quirós (Universidad Autónoma de Madrid)
Widder-type results for nonlocal heat equations
- 16:00 – 16:30 Marta Latorre (Universidad Rey Juan Carlos)
Study of a parabolic problem involving the 1–Laplacian operator and integrable data
- 16:30 – 17:00 Martina Magliocca (Universidad de Sevilla)
Global existence for certain fourth order evolution equations
- 17:00 – 17:30 Juan Campos (Universidad de Granada)
The shape of an epidemic wave

MARTES, 20 de enero

- 11:00 – 11:30 Mabel Cuesta (Université du Littoral Côte d'Opale)
A p -Laplacian problem with slightly subcritical regularly varying nonlinearity
- 11:30 – 12:00 Alexis Molino Salas (Universidad de Almería)
Existence of nontrivial solutions for an autonomous semilinear elliptic equation
- 12:00 – 12:30 Raul Ferreira (Universidad Complutense de Madrid)
Blow-up for a fully fractional heat equation
- 15:30 – 16:00 Rosa Pardo (Universidad Complutense de Madrid)
Elliptic Systems with Superlinear Terms on the Critical Hyperbola
- 16:00 – 16:30 Pedro Martínez-Aparicio (Universidad de Almería)
Unexpected results for a singular elliptic problem
- 16:30 – 17:00 Salvador López Martínez (Universidad Autónoma de Madrid)
Dark-bright solitons to one-dimensional Gross-Pitaevskii systems
- 17:00 – 17:30 Antonio Suárez (Universidad de Sevilla)
Semilinear interface elliptic equation arising in population dynamics

The shape of an epidemic wave

Juan Campos

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada

campos@ugr.es

The recent Covid-19 epidemic has made us see what an epidemic looks like. The most basic way to simulate these waves is to use the model described in [2]. This compartmental model was presented based on three groups of individuals, *susceptible*, *infected* and *recovered* and lead a differential system with three equations

$$\begin{aligned}S' &= -\beta SI, \\I' &= \beta SI - \delta I, \\R' &= \delta I.\end{aligned}$$

where $\beta > 0$ and $\delta > 0$ are the standard rates of infection and recovery, respectively. At first glance, only the first two equations are necessary. That is, they can be reduced to the study of susceptibles and infected. However, has anyone seen a profile of susceptibles within the numerous graphs in the news that the recent pandemic provided? The concept of a susceptible individual is not clear. Individuals who are either well confined or, for some genetic or biological reason, give rise to individuals who cannot suffer from the disease.

A method is proposed to understand biological parameters that only uses the profiles of infected individuals or at most recovered individuals. New parameters that are: epidemic severity, wave asymmetry and fraction of endemicity can be used to recover the infected profile. These results follows from [1].

References

- [1] J. Campos, M.C.A. Leite. Novel Approach to Extract Epidemiological Information from Waves in Epidemic's Profiles. to appear in Infectious Disease Modelling.
- [2] W. Kermack, A. McKendrick. (1991). Contributions to the mathematical theory of epidemics – I, *Bulletin of Mathematical Biology* 53 (1–2) 33–55.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por el Proyecto PID2022–137228OB–I00 financiado por el Ministerio de Ciencia, MICIU/AEI/10.13–039/501100011033 y “ERDF/EU A way of making Europe”, por el Proyecto C–EXP–265–UGR23 financiado por Consejería de Universidad, Investigación e Innovación & ERDF/EU Andalusia Program, & by Modeling Nature Research Unit, project QUAL21–011.

A p -Laplacian problem with slightly subcritical regularly varying nonlinearity

Mabel Cuesta, Rosa Pardo

Université du Littoral Côte d'Opale, Calais (France)

maria-mabel.cuesta-leon@univ-littoral.fr

We study the following quasilinear elliptic problem involving the p -laplacian operator and a slightly subcritical nonlinearity with a sign-changing weight $m \in C^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{p-1} + m(x)f(u), & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a smooth bounded domain of $\mathbb{R}^N$, $1 < p < N$ and Δ_p is the p -Laplacian operator. We assume that the slightly subcritical nonlinearity f is a regularly varying function at zero and at infinity, which are not necessarily asymptotic to a power at infinity. We state sufficient conditions which guarantee a Palais-Smale condition. We also provide a bifurcation theorem for these nonlinearities, which allow us to state the existence of a bifurcated branch of positive solutions, containing a turning point, and multiplicity of solutions.

A model of nonlinearity f that we have in mind is $f(s) = \frac{s^{p^*-1}}{\ln(e+s)^\alpha}$, $\alpha > 0$, $p^* = \frac{Np}{N-p}$

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Rosa Pardo (Universidad Complutense de Madrid).

Blow-up for a fully fractional heat equation

Raúl Ferreira, Arturo de Pablo

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid

raul.ferreira@mat.ucm.es

We study the existence and behaviour of blowing-up solutions to the fully fractional heat equation

$$\mathcal{M}u = u_p, \quad x \in \mathbb{R}^N, 0 < t < T$$

with $p > 0$, where $\mathcal{M}$ is a nonlocal operator given by a space-time kernel

$$M(x, t) = c_{N,\sigma} t^{-\frac{N}{2}-1-\sigma} e^{-\frac{|x|^2}{4}t} \mathbb{1}_{\{t>0\}}, \quad 0 < \sigma < 1.$$

This operator coincides with the fractional power of the heat operator, $\mathcal{M} = (\partial_t - \Delta)^\sigma$ defined through semigroup theory.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Arturo de Pablo.

Study of a parabolic problem involving the 1–Laplacian operator and integrable data

Marta Latorre, Sergio Segura de León

Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de los Materiales y Tecnología Electrónica, Universidad Rey Juan Carlos

marta.latorre@urjc.es

In this talk, we consider a parabolic problem involving the 1–Laplacian operator in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ with Lipschitz boundary, subject to Dirichlet boundary conditions and L^1 –data. Specifically, we consider the problem

$$\begin{cases} u'(t, x) - \Delta_1 u(t, x) = f(t, x) & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ u(t, x) = 0 & \text{on } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

where $T > 0$, and both the initial data u_0 and the source term f are merely integrable functions. The low regularity of the data prevents the existence of weak solutions.

To address this difficulty, we use the notion of entropy solutions and prove the existence and uniqueness of this type of solutions through an approximation procedure with regular data and the use of truncations. In addition, we establish a comparison principle and analyze the additional regularity that solutions present when data belong to spaces L^r with $1 < r < 2$.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Sergio Segura de León. Proyecto PID2022-136589NB-I00 parcialmente financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER Una manera de hacer Europa.

Dark-bright solitons to one-dimensional Gross-Pitaevskii systems

Salvador López Martínez

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

salvador.lopez@uam.es

Solitons are localized structures that propagate at constant speed without changing shape. A visual analogy would be a traveling water wave in a narrow channel. These structures typically arise in physical systems governed by coupled Gross-Pitaevskii equations, such as mixtures of Bose-Einstein condensates (BECs) and multimode nonlinear optics. Solitons are classified as dark or bright, depending on whether the density is a positive constant or zero at infinity, and emerge under repulsive (defocusing) or attractive (focusing) interactions, respectively. Experimental and numerical studies confirm the existence of stable dark-bright solitons, even when self-defocusing interactions are present in the bright component. In this talk, we will present recent analytical results that rigorously validate this phenomenon. Specifically, we will show that symmetric and radially monotone (in modulus) dark-bright solitons can be derived as energy minimizers subject to a momentum-mass constraint.

Global existence for certain fourth order evolution equations

Martina Magliocca, R. Granero-Belinchón

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla

mmagliocca@us.es

In this talk, we will see three global in time results for two fourth order nonlinear parabolic equations. The first of such equations involves the Hessian and appears in epitaxial growth. For such an equation, we give conditions ensuring the global existence of the solution. For certain regime of the parameters, our size condition involves the norm in a critical space with respect to the scaling of the equation and improves previous existing results in the literature for this equation. The second of the equations under study is a thin film equation with a porous medium nonlinearity. For this equation, we establish conditions leading to the global existence of the solution.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con R. Granero-Belinchón. Parcialmente financiado por los proyectos PID2022-141187NB-I00 y PID2022-140494NA-I00 financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE.

Unexpected results for a singular elliptic problem

Pedro J. Martínez-Aparicio, Daniela Giachetti, François Murat, Francesco Petitta

Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería

pma624@ual.es

In this lecture, I will present recent results [1, 2, 3] obtained in collaboration with Daniela Giachetti (Università di Roma, Sapienza), François Murat (Sorbonne Université, París), and Francesco Petitta (Università di Roma, Sapienza), for the one-dimensional singular boundary value problem

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = -\frac{d\phi(u(x))}{dx} - \frac{dg(x)}{dx} \text{ in } (0, L), \quad u(0) = u(L) = 0,$$

where the model for the singular function ϕ is $\phi(s) = \frac{1}{|s|^\gamma}$ with $\gamma > 0$.

This singular problem presents a number of unexpected phenomena: nonexistence of solutions under certain assumptions, existence of an infinite number of solutions under other assumptions, and non-continuity of the solution with respect to the data.

References

- [1] D. Giachetti, P. J. Martínez-Aparicio, F. Murat and F. Petitta (2025) Unexpected phenomena in a one-dimensional elliptic equation with a singular first order divergence term. Preprint.
- [2] D. Giachetti, P. J. Martínez-Aparicio, F. Murat and F. Petitta. Remarks and variants on a one-dimensional elliptic equation with a singular first order divergence term, in preparation.
- [3] D. Giachetti, P. J. Martínez-Aparicio, F. Murat and F. Petitta A one-dimensional elliptic equation with a first order divergence term singular in $m \neq 0$, in preparation.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Daniela Giachetti, François Murat y Francesco Petitta. Parcialmente financiado por el proyecto PGC2018-096422-B-I00 y por el Grupo de la Junta de Andalucía FQM-116..

Existence of nontrivial solutions for an autonomous semilinear elliptic equation

Alexis Molino, Salvador Villegas

Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería

amolino@ual.es

This talk is concerned with the existence of nontrivial solutions to the problem

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a smooth bounded domain, $N \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ and $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is any locally Lipschitz function with nonpositive primitive.

A complete description is obtained for $N = 1$ and partial results for $N \geq 2$.

References

- [1] A. Molino, S. Villegas (2025) Solutions for autonomous semilinear elliptic equations (2025). Submitted. <https://arxiv.org/pdf/2504.18877>
- [2] S. López-Martínez, A. Molino (2022) Nonexistence result of nontrivial solutions to the equation $-\Delta u = f(u)$, *Complex Var. Elliptic Equ.* 67, no. 1, 239–245.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Salvador Villegas. Proyecto parcialmente financiado por (MCIU) Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, Agencia Estatal de Investigación (AEI) y Fondo Europeo de Desarrollo Regional a través del proyecto PID2021-122122NB-I00 (FEDER) y por Junta de Andalucía FQM-116.

Elliptic Systems with Superlinear Terms on the Critical Hyperbola

Rosa Pardo, Mabel Cuesta, Angela Pistoia

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid

rpardo@ucm.es

We focus on semilinear elliptic systems involving a nonlinearity of slightly subcritical nature understood in a generalized sense. For this problem, standard compact embeddings cannot be used to guarantee the existence of solutions as in the case of power-type nonlinearities. Instead, we use the dual method on Orlicz spaces. Roughly speaking, this method consists in taking the inverse of the Laplace operator, and defining the inverse of the nonlinearities. We state sufficient conditions guaranteeing the Palais-Smale condition, showing that our problem possesses a mountain pass type solution.

References

- [1] M. Cuesta, R. Pardo, A. Pistoia. (2024). Positive solutions of elliptic systems with superlinear terms on the critical hyperbola. *Milan J. Math.*, 92(2), 439–472.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Mabel Cuesta y Angela Pistoia. Proyecto parcialmente financiado por PID2022-137074NB-I00, MICINN, España, y por UCM, España, Grupo 920894.

Widder-type results for nonlocal heat equations

Fernando Quirós, Irene González, Fernando Soria, Zoran Vondraček

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid
Instituto de Ciencias Matemáticas ICMAT (CSIC-UAM-UCM-UC3M)

fernando.quirós@uam.es

We develop a Widder-type theory for nonlocal heat equations involving quite general Lévy operators. Thus, we consider nonnegative solutions and look for conditions on the operator that ensure: (i) uniqueness of nonnegative classical and very weak solutions with a given initial trace; (ii) the existence of an initial trace, belonging to certain admissibility class; and (iii) the existence of a solution, given by a representation formula, for any admissible initial trace. Such results are obtained first for purely nonlocal Lévy operators defined through positive symmetric Lévy kernels comparable to radial functions with mixed polynomial growth, and then extended to more general operators, including anisotropic ones and operators that have both a local and a nonlocal part.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Irene González (UAM/ICMAT), Fernando Soria (UAM) y Zoran Vondraček (Dr. Franjo Tuđman Defense and Security U. /U. Zagreb). Parcialmente financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 por medio de los proyectos PID2023-146931NB-I00, RED2022-134784-T y CEX2023-001347-S.

Semilinear interface elliptic equation arising in population dynamics

Antonio Suarez, C. Morales–Rodrigo, M. Molina–Becerra, B. B. V. Maia, P. Álvarez–Caudevilla, Cristina Brändle

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla

suarez@us.es

In this talk we consider an interface logistic problem where two populations live in two different regions, separated by a membrane or interface where it happens an interchange of flux. Thus, the two populations only interact or are coupled through such a membrane where we impose the so-called Kedem-Katchalsky boundary conditions. For this particular scenario we analyze the existence and uniqueness of positive solutions depending on the parameters involved in the system.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con C. Morales-Rodrigo (US), M. Molina-Becerra (US), B. B. V. Maia (UFRA), P. Álvarez-Caudevilla (UCIII) y Cristina Brändle (UCIII). Proyecto parcialmente financiado por el Proyecto PID2023-149509NB-I00 (Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades)

Sesión especial 11

Estructuras superiores en Álgebra, Geometría y Topología

Equipo organizador:

- *Víctor Carmona* (Max-Planck Institute for Mathematics in the Sciences)
- *Fernando Muro* (Universidad de Sevilla)

Descripción

Esta sesión está dedicada al estudio de estructuras superiores que surgen en el álgebra, la geometría y la topología, y que desempeñan un papel central en el desarrollo de teorías matemáticas contemporáneas. Por citar algunos ejemplos, estas son fundamentales para la teoría de categorías superiores, la teoría de homotopía estable e inestable y en geometría derivada. Se pretende establecer un marco de discusión común en el que investigadores de diversas áreas puedan encontrar un lenguaje compartido mediante la variedad de técnicas empleadas, fomentando así nuevas sinergias y posibles colaboraciones. En particular, se prestará especial atención a las opéradas, a sus variaciones y a sus aplicaciones.

Keywords: higher structures; (pr)operads; higher categories.

Programa

LUNES, 19 de enero

- 15:30 – 16:00 Ana Ros Camacho (Cardiff University)
Extensions of Tambara-Yamagami categories and their NIM-representations
- 16:00 – 16:30 Imma Gálvez Carrillo (Universidad de Málaga)
Symmetric functions, objectively
- 16:30 – 17:00 Javier J. Gutiérrez (Universitat de Barcelona)
A model for ∞ -operads based on dendroidal Segal spaces
- 17:00 – 17:30 Andrew Tonks (Universidad de Málaga)
Some remarks on Markl's twisted structures

MARTES, 20 de enero

- 11:00 – 11:30 Mario Fuentes (Institut de Mathématiques de Toulouse)
Associativity or commutativity, but not both
- 11:30 – 12:00 Cristina Costoya (Universidad de Santiago de Compostela)
Realizing finite subsets of $\mathbb{Q}$ as mapping degree sets
- 12:00 – 12:30 Aniceto Murillo (Universidad de Málaga)
Teoría de homotopía estable racional
- 15:30 – 16:00 Alexandre Quesney (Universidad Politécnica de Madrid)
Estructuras en geometría no-conmutativa
- 16:00 – 16:30 Víctor Roca i Lucio (Université Paris Cité)
The algebraic structures of social organizations: the operad of cooperative games
- 16:30 – 17:00 José M. Moreno Fernández (Universidad de Málaga)
Unos productos de Massey sensibles a la estructura conmutativa en términos de determinantes

Extensions of Tambara-Yamagami categories and their NIM-representations

Ana Ros Camacho

School of Mathematics, Cardiff University

roscamachoa@cardiff.ac.uk

Tambara-Yamagami categories are one of the easiest instances of near-group fusion categories, and they have been studied in depth. In particular, they are connected to different topics in mathematical physics (like e.g. conformal nets), making them even more interesting. Several ways of extending Tambara-Yamagami categories have been introduced by diverse authors in recent years [4, 1, 2]. In this talk we will present these, the respective fusion rings, how to compute their non-negative integer matrix representations (or NIM-reps for short), and how to use these to classify algebra objects in these categories based on [3]. This is joint work in progress with A. Czenky, E. McGovern, M. Molander and M. Müller as part of the ‘Women in Mathematical Physics 3’ initiative.

References

- [1] C. Galindo, S. Lentner, S. Möller (2024). Modular $\mathbb{Z}_2$ -Crossed Tambara-Yamagami-like Categories for Even Groups. *arXiv: 2411.12251*.
- [2] C. Galindo, S. Lentner, S. Möller (2024). Computing G -Crossed Extensions and Orbifolds of Vertex Operator Algebras. *arXiv: 2409.16357*.
- [3] S. Hannah, A. Ros Camacho, Appendix with D. Young (2024). Detecting algebra objects from NIM-reps in pointed, near-group and quantum group-like fusion categories. *Nuclear Physics B*, Volume 1002, 116525.
- [4] D. Jordan, E. Larson (2009). On the classification of certain fusion categories. *J. Noncommut. Geom.*, 3, 481–499.

Symmetric functions, objectively

Imma Gálvez Carrillo

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga

imma.galvez@uma.es

In this talk I will report on progress with J. Kock and A. Tonks on examples of decomposition spaces [2, 3] (also known as higher Segal spaces [1]) whose homotopy cardinalities recover the combinatorial Hopf algebras of symmetric functions. This provides both a fresh perspective on symmetric functions as well as highlighting some fundamental ideas in the theory of decomposition spaces.

We first introduce decomposition spaces $\Lambda^M, \Lambda^P, \Lambda^H$ etc, the objective counterparts of the ring of symmetric functions in the classical $m, p, h, \dots$ bases. These cases arise from monoidal restriction species and so have compatible algebra and coalgebra structures. They are not isomorphic or even homotopy equivalent (so we can say the objective theory is finer than the algebraic setting) and our next step is to provide linear functors between them — the objective counterparts of change-of-basis matrices — and here we find important examples ‘in nature’ of bialgebra decomposition spaces that do not arise from monoidal restriction species.

Time permitting we will discuss objective antipodes, Möbius invertibility of the change-of-basis functors, or relations with other classical combinatorial structures, such as the Malvenuto–Reutehauer or Loday–Ronco Hopf algebras, arising from permutations or trees.

References

- [1] T. Dyckerhoff, P. M. Kapranov (2019). *Higher Segal Spaces*. Springer.
- [2] I. Gálvez-Carrillo, J. Kock, A. Tonks (2018) Decomposition spaces, incidence algebras and Möbius inversion I: Basic theory. *Adv. Math.* 331, 952–1015.
- [3] I. Gálvez-Carrillo, J. Kock, A. Tonks. Decomposition spaces in combinatorics. *To appear*.

A model for ∞ -operads based on dendroidal Segal spaces

Javier J. Gutiérrez

Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona

javier.gutierrez@ub.edu

In this talk, we present a model structure for ∞ -operads on the category of dendroidal spaces, whose fibrant objects are precisely the dendroidal Segal spaces, that is, dendroidal spaces satisfying the Segal condition without imposing completeness. We show that this model structure is Quillen equivalent to the model of ∞ -operads given by complete dendroidal Segal spaces. Moreover, slicing over the dendroidal space of the trivial tree recovers the analogous model structure for ∞ -categories in simplicial spaces recently established by Nuiten and Moser. This is a joint work with João Candeias.

Some remarks on Markl's twisted structures

Andrew Tonks

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga

at@uma.es

This talk will be an introduction to our recently published paper ‘On differential Hopf algebras and B_∞ algebras’ [1] joint with Imma Gálvez-Carrillo and María Ronco, and also some possible (more speculative) consequences. The title refers to Martin Markl’s 2015 paper [3] on the origin of higher braces and higher order derivations, where he observed the L_∞ Koszul hierarchy and the Børjeson A_∞ hierarchy are examples of ‘trivial’ structures twisted by a canonical automorphism. Thus, given a trivial A_∞ algebra $(A, d, 0, \dots)$, one may conjugate the corresponding differential ∂ on the bar construction by any coalgebra automorphism f of BA and obtain a new A_∞ algebra structure. Our contribution was to observe, firstly, that analogous formalism gives immediately the multibrace algebra construction of Loday–Ronco [2] which together with the rigidity theorem for (conilpotent) unital infinitesimal biaglegbras gives a Milnor–Moore style equivalence of categories, and, secondly, that the Børjeson and Loday–Ronco results combine to give a new Milnor–Moore theorem for B_∞ and differential 2-associative bialgebras.

References

- [1] I. Gálvez-Carrillo, M. Ronco, A. Tonks (2025). On differential Hopf algebras and B_∞ -algebras. *Mediterr. J. Math.* 22, no. 4, 25 pp.
- [2] J.L. Loday, M. Ronco (2006). On the structure of cofree Hopf algebras. *J. Reine Angew. Math.* 592, 123–155.
- [3] M. Markl (2015). On the origin of higher braces and higher-order derivations. *J. Homotopy Relat. Struct.* 10, no. 3, 637–667.

Associativity or commutativity, but not both

Mario Fuentes

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier

mario.fuentes.rumi@gmail.com

Given a simplicial set X , there is a well-known operation on the normalized cochain complex $N^*(X)$: the cup product. It is associative but, in general, not graded commutative (it becomes so in cohomology, but not at the cochain level). This failure of commutativity is measured by the Steenrod operations.

On the other hand, working over the field of rational numbers and using Sullivan's polynomial differential forms on simplices together with Dupont's contraction, we can transfer a C_∞ -structure onto $N^*(X)$. Considering the operation of arity 2, we obtain a commutative but not associative multiplication.

The relationship between these two operations is quite mysterious (at least to me!). However, we do know that they coincide in cohomology, where we recover the usual commutative and associative cup product. In this talk, containing more questions than answers, we will present these structures and some facts about them.

Realizing finite subsets of $\mathbb{Q}$ as mapping degree sets

Cristina Costoya

Departamento de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela

`cristina.costoya@usc.es`

Given two oriented closed connected manifolds M and N of the same dimension, the mapping degree set is

$$\deg(M, N) = \{\deg(f) \mid f: M \rightarrow N \text{ continuous}\}.$$

A central problem is to determine which subsets of integers (containing 0) can occur as mapping degree sets. By a simple cardinality argument, not every infinite subset of $\mathbb{Z}$ can occur, while the full picture remains an open problem.

In this talk we will discuss the rational version: using Sullivan models, we prove that every finite subset of $\mathbb{Q}$ (containing 0) can be realized as the mapping degree set of oriented closed simply-connected manifolds. The techniques we develop provide key tools to address the integral case, where the same affirmative result holds in the finite setting.

This is a joint work with Vicente Muñoz and Antonio Viruel.

Teoría de homotopía estable racional

Aniceto Murillo

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga

aniceto@uma.es

Es bien sabido que la categoría homotópica estable racional no es más que la categoría homotópica de los complejos de cadena.

Extendemos este resultado a la teoría de homotopía estable racional parametrizada que a su vez transcurre a lo largo de otras tantas categorías de espectros de categorías algebraicas.

Esta charla está basada en trabajo conjunto con Yves Félix and Alejandro Saiz.

Estructuras en geometría no-conmutativa

Alexandre Quesney

Departamento de Matemática Aplicada a las TIC, Universidad Politécnica de Madrid

alexandre.quesney@upm.es

Estudiamos diferentes maneras de obtener estructuras en geometría no-conmutativa, focalizando en versiones no-conmutativas de las estructuras de Poisson, bi-Hamiltonianas y Poisson-Nijenhuis.

The algebraic structures of social organizations: the operad of cooperative games

Víctor Roca i Lucio

Département de Mathématiques, Université Paris Cité

`rocalucio@imj-prg.fr`

Cooperative game theory studies how cooperation arises between individuals depending on the eventual gains that each possible coalition can obtain. This is modelled by the notion of a cooperative game, which amounts to the data of a set of players N and a set function from the power set $P(N)$ to the real numbers. The main goal of this talk is to explain how one can study cooperative games using operad theory. We start by endowing the collection of all cooperative games with any number of players with an operad structure. Then, we will explain how the composition in this operad generalizes to the notions composition/aggregation of games considered before by Owen, Shapley, von Neumann and Morgenstern, and many others. Furthermore, we explicitly compute this operad in terms of generators and relations, and show that it corresponds via the Möbius transform to the operad encoding commutative triassociative algebras. If time permits, we will then explain how this operad structure restricts to many interesting classes of games (simple, balanced, capacities a.k.a fuzzy measures and convex functions, totally monotone, etc) and how one can obtain a new operad structure on the family of all generalized permutahedra using this. Finally, we will explain how different solution concepts such as the core and the Shapley or the Banzhaf values interact with the composition of this operad.

This is joint work with Dylan Laplace Mermoud, <https://arxiv.org/abs/2507.01969>.

Unos productos de Massey sensibles a la estructura conmutativa en términos de determinantes

José M. Moreno Fernández

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga

josemoreno@uma.es

Presentamos unas operaciones secundarias nuevas en la (co)homología de una cdga (álgebra graduada diferencial conmutativa) y de algunas álgebras con condiciones de asociatividad/conmutatividad más débiles. Estos nuevos productos están relacionados con los productos de Massey matriciales y los determinantes, y permiten detectar sutilezas respecto a los distintos niveles de conmutatividad que puede tener un álgebra n -asociativa. Este es un trabajo en progreso con Oisín Flynn-Conolly y Fernando Muro.

Sesión especial 12

Evolution PDEs in applied sciences

Equipo organizador:

- *Alejandro Gárriz* (Universidad de Granada)
- *David Poyato* (Universidad de Granada)
- *Fernando Quirós* (Universidad Autónoma de Madrid)

Descripción

La sesión se centra en el análisis matemático de una amplia clase de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) que describen diversos fenómenos en física y biología. Desde un punto de vista matemático, estas EDPs son a menudo ecuaciones integrodiferenciales hiperbólicas o parabólicas con términos no locales y no lineales que hacen el análisis complejo, tanto desde el punto de vista teórico como computacional. Entre los fenómenos de interés que se abordarán en la sesión destacan: coagulación-fragmentación, agregación-difusión, reacción-difusión, dinámica colectiva, quimotaxis, difusión no lineal y/o no local, formación de patrones, dinámica tumoral, etc.

Algunas de las cuestiones matemáticas que se abordarán en relación con dichos fenómenos son: existencia, unicidad, regularidad y estabilidad de las soluciones, existencia global vs explosión en tiempo finito, comportamiento a largo plazo, comportamiento a corto plazo, límites de la escala microscópica a la macroscópica, flujos gradiente, transporte óptimo de masa, controlabilidad y control óptimo, problemas inversos, etc.

Palabras clave: Ecuaciones en Derivadas Parciales; Física; Biología.

Programa

JUEVES, 22 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:30 | José M. Mazón (Universidad de Valencia)
<i>Evolution problems with perturbed 1-Laplacian type operators on random walk spaces</i> |
| 11:30 – 12:00 | Félix del Teso (Universidad Autónoma de Madrid)
<i>Mean Value Properties for Local and Nonlocal p-Laplace Problems</i> |
| 12:00 – 12:30 | Inmaculada Benítez (Universidad de Granada)
<i>Asymptotic behaviour of solutions to the Becker-Döring equations</i> |
| 12:30 – 13:00 | Juan Calvo (Universidad de Granada)
<i>The Lifshitz-Slyozov system with inflow boundary conditions</i> |
|
 | |
| 16:00 – 16:30 | Tomás Alarcón (ICREA, CRM)
<i>Particle simulations of the interaction between cancer and immune cells</i> |
| 16:30 – 17:00 | Martina Conte (Politecnico di Torino)
<i>Modeling cell dynamics across multiple scales</i> |
| 17:00 – 17:30 | Mingmin Zhang (University of Science and Technology of China)
<i>Front propagation for a transport model with a nonlocal condition of the Fisher-KPP type at the boundary</i> |
|
 | |
| 18:00 – 18:30 | María A. Rodríguez Bellido (Universidad de Sevilla)
<i>Looking for an adequate framework for studying optimal control problems restricted to chemotaxis PDE models</i> |
| 18:30 – 19:00 | Martina Magliocca (Universidad de Sevilla)
<i>Traveling Motility of Actin Lamellar Fragments Under spontaneous symmetry breaking</i> |

VIERNES, 23 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:30 | Antonio Suárez (Universidad de Sevilla)
<i>Lotka-Volterra models with nonlocal coefficient diffusion</i> |
| 11:30 – 12:00 | María José Cáceres (Universidad de Granada)
<i>Asymptotic behaviour of some mesoscopic models for neurons populations</i> |
| 12:00 – 12:30 | José A. Cañizo (Universidad de Granada)
<i>Diffusive behaviour of some linear kinetic equations</i> |

Evolution problems with perturbed 1-Laplacian type operators on random walk spaces

José M. Mazón

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Valencia

mazon@uv.es

Random walk spaces are a general framework for the study of PDEs. They include as particular cases locally finite weighted connected graphs and nonlocal settings involving symmetric integrable kernels on $\mathbb{R}^N$. We are interested in the study of evolution problems involving two random walk structures so that the associated functionals have different growth on each structure. We also deal with the case of a functional with different growth on a partition of the random walk.

Joint work with W. Górny and J. Toledo.

References

- [1] W. Górny, J. M. Mazón, J. Toledo (2025). Evolution problems with perturbed 1-Laplacian type operators on random walk spaces. *Mathematische Annalen*.

Mean Value Properties for Local and Nonlocal p -Laplace Problems

Félix del Teso

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

felix.delteso@uam.es

The aim of this talk is to present recent advances on asymptotic expansions, mean value properties, and finite difference schemes for parabolic and elliptic equations involving the p -Laplacian and fractional p -Laplacian operators.

Asymptotic behaviour of solutions to the Becker-Döring equations

Inmaculada Benítez

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada

inmbenber@ugr.es

Coagulation and fragmentation equations are mathematical models that describe the processes of particle aggregation (coagulation) and division (fragmentation) within a population. These equations, utilized in fields such as chemistry, physics, and biology, are crucial for understanding the dynamics of particle systems. Coagulation equations depict how particles merge to form larger entities, while fragmentation equations illustrate the breakdown of larger particles into smaller ones.

The Becker-Döring equations, introduced by Becker and Döring (1935), serve as fundamental frameworks for describing first-order phase transitions in various chemical and physical systems, such as vapor condensation and lipid aggregation. Over the years, significant attention has been devoted to studying this model in the nonlinear case in contrast to the linear situation, such as the work by Penrose (1989) where metastable states were studied, or Cañizo & Lods (2013), studying the exponential convergence of the solution only in the subcritical case. For this reason, we focus on the linear Becker-Döring equations, defined by:

$$\frac{d}{dt}c_i(t) = W_{i-1} - W_i, \quad \text{for all } i \geq 2$$

being c_1 constant for all $t \in \mathbb{R}$, where the fluxes W_i depend on the coagulation and fragmentation coefficients a_i and b_i , respectively, following the expression $W_i = a_i c_1 c_i - b_{i+1} c_{i+1}$.

Our aim is to examine the long-term behaviour of solutions to the equilibria, providing a more accurate estimation of the convergence rate than that shown by Kreer (1993). To achieve this, we employ spectral theory and entropy methods, using the free energy provided also by Kreer (1993).

The Lifshitz-Slyozov system with inflow boundary conditions

Juan Calvo

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada

juancalvo@ugr.es

The Lifshitz-Slyozov system describes the temporal evolutions of a mixture of monomers and aggregates, where monomers can attach to or detach from already existing aggregates. The aggregate distribution follows a transport equation with respect to a size variable, whose transport rates are coupled to the dynamics of monomers in a nonlocal fashion. Recent applications to protein polymerization phenomena introduce attachment and detachment rates that require a nonlinear boundary condition at zero size, which describes nucleation processes. In this talk we review and discuss the available results for this model concerning well-posedness and long-time dynamics, with a focus on those cases where concentration at small sizes is observed.

References

- [1] J. Calvo, E. Hingant, R. Yvinec (2021). The initial-boundary value problem for the Lifshitz-Slyozov equation with non-smooth rates at the boundary. *Nonlinearity*, 34, 1975–2017.
- [2] J. Calvo, E. Hingant, R. Yvinec (2022). Some remarks about the well-posedness of Lifshitz-Slyozov's equations with nucleation kinetics. To appear in *Proceedings of the International Conference on Hyperbolic problems (HYP22)*.
- [3] J. Calvo, E. Hingant, R. Yvinec (2024). Long-time asymptotic of the Lifshitz-Slyozov equation with nucleation. *Kinetic and Related Models*, 17, 755–773.

Individual-based model of cancer-immune system interactions: The role of cell adhesion and immune cell exhaustion

Tomás Alarcón

ICREA, CRM

alarcon@crm.cat

We present a particle-based, individual based model of the interactions between cancer and immune cells “in vitro”. We have formulated a new off-lattice individual-based model (IBM) which extends existing models of immune-system infiltration into tumours by accounting for dynamic variation in the exhaustion of the immune cells and damage incurred by the tumour cells. The IBM model distinguishes two types of cells: immune cells and cancer cells. Their dynamics are influenced by two internal variables (structure). In the case of cancer cells, the internal variable accounts for the number of encounters or “hits” each of them has had with the immune cells. Immune cells are characterised by a rate of exhaustion (RE), which accounts for how fast immune cells lose cytolytic activity as they accumulate encounters with the cancer population until eventually they cannot carry out their anti-cancer function any longer. In this work, we investigate how cell adhesion molecules (such as CD2 and ICAM-1) affect immune cell infiltration into cluster of tumour cells and how immune cell exhaustion is affected by upregulation of such molecules.

Modeling cell dynamics across multiple scales

Martina Conte

Department of Mathematical Sciences “G.L. Lagrange”, Politecnico di Torino

martina.conte@polito.it

The characterization of biological phenomena related to cell evolution and their interactions with the microenvironment often involves processes occurring across a range of spatial and temporal scales. As a result, mathematical models designed to describe cell dynamics must capture this inherent multiscale complexity. In this talk, we introduce a multiscale mathematical framework based on kinetic equations to describe cellular mechanisms that are well characterized at different scales—from the individual level, where stochastic mechanisms of cell reorientation can be incorporated, to the kinetic level, which describes collective cell motion in response to microenvironmental stimuli, and ultimately to macroscopic descriptions of cellular aggregates.

Front propagation for a transport model with a nonlocal condition of the Fisher-KPP type at the boundary

Mingmin Zhang

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China

mingmin.zhang.math@gmail.com

The model under study is a linear transport equation in the upper half plane, together with a nonlinear and nonlocal Dirichlet condition that couples the values of the unknown function at the boundary to those inside. The objective is to understand its precise asymptotics in time. Its structure is reminiscent of that of the “Road-field model” introduced by Berestycki, Roquejoffre and Rossi. Its primary motivation is the study of the nonlocal Kermack-McKendrick model for the spread of epidemics, and it presents specific issues calling for a mathematical study of its own. I will talk about the derivation of the model and discuss some of its general properties. Then, I will show that any initially localized solution will lag behind the minimal traveling waves and the delay grows logarithmically in time. This is a joint work with G. Faye and J.-M. Roquejoffre.

References

- [1] G. Faye, J.-M. Roquejoffre, M. Zhan (2023). Spreading properties in Kermack - McKendrick models with nonlocal spatial interactions – A new look. *hal-04078812*

Looking for an adequate framework for studying optimal control problems restricted to chemotaxis PDE models

María A. Rodríguez Bellido

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, IMUS, Universidad de Sevilla

angeles@us.es

Mathematical models of chemotaxis attempt to reproduce biological processes in which spatial movement of a living organism is modified by the presence of a chemical substance (see [1] for a review). The biological importance of these processes and the advantages of a mathematical approach from an ethical point of view are some of the reasons why the mathematical literature on this topic is so extensive. No less important are the attempts to control the behavior of the variables involved to achieve the desired effects. However, these models are not very regular, mathematically speaking, which makes their analysis difficult.

In this work we address the formulation of control problems restricted to some chemotaxis models and we try to establish an optimal functional framework to deduce rigorously optimality conditions for the optimal control problems.

The results presented in this talk are mainly based on [2, 3, 4, 5].

References

- [1] N. Bellomo, A. Bellouquid, Y. Tao, M. Winkler (2015). Toward a mathematical theory of Keller-Segel models of pattern formation in biological tissues. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 25(9), 1663–1763.
- [2] P. Braz e Silva, F. Guillén-González, C. F. Perusato, M. A. Rodríguez-Bellido (2023). Bilinear optimal control for weak solutions of the Keller-Segel logistic model in 2D domains. *Appl. Math. Optim.* 87, article number 55.
- [3] F. Guillén-González, E. Mallea-Zepeda, M. A. Rodríguez-Bellido (2020). Optimal bilinear control problem related to a chemo-repulsion system in 2D domains. *AESAIM Control Optim. Calc. Var.* 25, article number 29 article number 55.
- [4] F. Guillén-González, E. Mallea-Zepeda, M. A. Rodríguez-Bellido (2020). A Regularity Criterion for a 3D Chemo-Repulsion System and Its Application to a Bilinear Optimal Control Problem. *SIAM J. Control and Optimization* 58(3), 1457–1490.
- [5] F. Guillén-González, E. Mallea-Zepeda, M. A. Rodríguez-Bellido, E. J. Villamizar-Roa (2025). Optimal bilinear control restricted to the three-dimensional chemo-repulsion model with potential production. *Work in progress*.

Traveling Motility of Actin Lamellar Fragments Under spontaneous symmetry breaking

Martina Magliocca

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla

mmagliocca@us.es

Cell motility is connected to the spontaneous symmetry breaking of a circular shape. In [1], Blanch-Mercader and Casademunt performed a nonlinear analysis of the minimal model proposed by Callan and Jones in [2] and numerically conjectured the existence of traveling solutions once that symmetry is broken. In this work, we prove analytically that conjecture by means of nonlinear bifurcation techniques.

These results have been obtained in collaboration with Claudia García, Martina Magliocca, Nicolas Meunier.

References

- [1] C. Blanch-Mercader, J. Casademunt (2013). Spontaneous motility of actin lamellar fragments. *Physical review letters*, 110(7), 078102.
- [2] A. C. Callan-Jones, J. F. Joanny, J. Prost (2013). Viscous-fingering-like instability of cell fragments. *Physical review letters*, 100(25), 258106.

Lotka-Volterra models with nonlocal coefficient diffusion

Antonio Suárez

Universidad de Sevilla

suarez@us.es

In this talk we present theoretical results of the Lotka-Volterra models with non-local diffusion, specifically, the diffusion coefficients depend on the total population in a nonlinear way. This kind of diffusion models that the species tends to leave crowded areas or is attracted to regions with higher population density, depending on whether the nonlinear function increases or decreases, respectively. The inclusion of these non-local terms in the diffusion coefficients entails significant technical difficulties. We show results of the existence and non-existence of coexistence states of the models depending on the coefficients of the model

Asymtotic behaviour of some mesoscopic models for neurons populations

María J. Cáceres

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada

caceresg@ugr.es

In recent decades, the mathematical science community has made significant contributions to the study of neuronal population dynamics, proposing a wide variety of models. Among these are two families based on partial differential equations: the NNLIIF model (Nonlinear Noisy Leaky Integrate and Fire) and the time-since-last-discharge model. The former is grounded in a nonlinear Fokker–Planck type equation, while the latter is described by a nonlinear age-structured equation. In the NNLIIF model, the neuronal population is represented in terms of the membrane potential, whereas in the age-structured model, the variable is the time elapsed since the last discharge.

In this talk, we will study the asymptotic behavior of these models. Different techniques have been employed for this purpose. One of them, widely used in kinetic theory, is the entropy dissipation method.

We will discuss the limitations of this approach for these models and present alternative techniques based on two main ideas: 1) the analysis of a much simpler discrete-type model, and 2) the reformulation of the problem, via the Laplace transform, as a Volterra-type integral equation.

This talk is based on works in collaboration with José A. Cañizo, Alejandro Ramos-Lora and Nicolás Torres.

Diffusive behaviour of some linear kinetic equations

José A. Cañizo

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada

canizo@ugr.es

We consider linear kinetic equations of the form $\partial_t f + \frac{1}{\epsilon} v \nabla_x f = \frac{1}{\epsilon^2} L(f)$, for an unknown f which depends on time t , position x and velocity v , and where L is a linear operator which acts only in the velocity variable, and which typically has a probability equilibrium in v . Important examples include the Fokker-Planck operator, nonlocal diffusion operators, linear BGK-type operators, or linear Boltzmann operators. This PDE typically represents a mesoscopic physical model, where we keep track of the probability distribution of the position and velocity of particles. It is well known that when ϵ tends to 0, this type of equation has a macroscopic or diffusive limit for the density $\rho(t, x) := \int f(t, x, v) dv$, which is either the standard heat equation, or the fractional heat equation. As a new result, we show that for a fixed epsilon, the behaviour of this equation for large times also follows the standard or fractional heat equation, and that the long-time and small-epsilon limits are actually interchangeable in many cases. This is a work in collaboration with Stéphane Mischler (U. Paris-Dauphine) and Niccolò Tassi (U. Granada).

Sesión especial 13

Fluid Dynamics and PDEs

Equipo organizador:

- *Eduardo García-Juárez* (Universidad de Sevilla)
- *Antonio Hidalgo-Torné* (Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences)
- *Fran Mengual* (Universidad de Sevilla)
- *Elena Salguero* (Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences)

Description

The study of fluid dynamics plays a crucial role in mathematics and finds multiple applications in the natural sciences. The aim of this session is to bring together outstanding researchers who will present recent developments in the theoretical understanding of partial differential equations (PDEs) arising from fluid dynamics and related topics.

Key topics include analytical challenges such as the existence and uniqueness of solutions, stability properties, singularity formation, bifurcation analysis, and the asymptotic behavior of fluid models. The session will focus on cutting-edge research in the analysis of PDEs in fluid mechanics and provide a platform for collaboration and the exchange of ideas among experts in the field.

Keywords: Fluid mechanics; Partial differential equations; Turbulence; Stability

Programa

LUNES, 19 de enero

- 15:30 – 16:00 Diego Alonso-Orán (Universidad de La Laguna)
Rotating solutions to the incompressible Euler-Poincaré equation with external particle
- 16:00 – 16:30 Camilla Nobili (University of Surrey)
Enhanced Dissipation via Time-Dependent Velocity Fields
- 16:30 – 17:00 Ángel Castro (ICMAT)
Travelling and rotating solutions close to shear flows
- 17:00 – 17:30 Michele Dolce (EPFL)
Long wave instabilities of general shear flows for 2D viscous fluids

MARTES, 20 de enero

- 11:00 – 11:30 Clara Patriarca (Université Libre de Bruxelles)
Stability of equilibria and bifurcations for a fluid-solid interaction problem
- 11:30 – 12:00 Francisco Gancedo (Universidad de Sevilla)
2D Navier-Stokes free boundary: nonnegative density and viscosity contrast
- 12:00 – 12:30 Gonzalo Cao-Labora (EPFL)
Computer-assisted techniques for proving stability in PDEs
- 15:30 – 16:00 Francesco Fanelli (BCAM)
Geometric traits in the incompressible Euler equations with variable density
- 16:00 – 16:30 Zineb Hassainia (Universidad de Granada)
Leapfrogging Motion in Fluid Dynamics
- 16:30 – 17:00 Joan Mateu (Universitat Autònoma de Barcelona)
On the analyticity of the trajectories of the particles in the patch problem for some active scalar equations
- 17:00 – 17:30 Annalaura Rebutti (Max Planck Institute MiS)
On the De Giorgi-Nash-Moser regularity theory for kinetic hypoelliptic operators
- 18:00 – 18:30 Edoardo Bocchi (Politecnico di Milano)
Asymptotics of the Stokes problem close to solid contacts
- 18:30 – 19:00 Rafael Granero (Universidad de Cantabria)
On the mathematical description of tumor growth

Rotating solutions to the incompressible Euler-Poincaré equation with external particle

Diego Alonso-Orán

Universidad de La Laguna

dalonsor@ull.edu.es

In this talk, we consider a two-dimensional, incompressible fluid body, together with self-induced interactions. The body is perturbed by an external particle with small mass. The combined fluid–particle system rotates uniformly about its common center of mass. Using perturbative methods, we construct solutions that are stationary in a uniformly rotating frame. In addition, we identify a broad class of internal fluid motions compatible with this regime. If time permits, we will also outline forthcoming results.

Enhanced Dissipation via Time-Dependent Velocity Fields

Camilla Nobili, J. Benthous, G. M. Coclite

University of Surrey

c.nobili@surrey.ac.uk

Enhanced dissipation is a phenomenon of central importance in both physics and mathematics, owing to its fundamental role in fluid mixing and its wide-ranging applications, particularly in chemical processes. Over the past two decades, major advances in mathematical fluid mechanics have yielded rigorous descriptions of this effect, including precise quantitative estimates of energy dissipation rates for specific classes of flows (Constantin, Kiselev, Ryzhik & Zlatos 2008; Bedrossian & Coti Zelati 2017; Coti Zelati, Delgadino & Elgindi 2019). Nonetheless, for time-dependent velocity fields, the inherent dynamical complexity and the limitations of current analytical techniques make obtaining quantitative results significantly more challenging, and this area remains comparatively less developed.

In this talk, I will focus on certain classes of time-dependent shear flows and present mixing estimates together with quantitative bounds that display (super-)enhanced dissipation. Some of these results draw inspiration from mixing mechanisms commonly employed in analytical laboratories, offering new insights into how particular flow structures can dramatically accelerate dissipation.

This is based on recent joint works with Johannes Benthous and Giuseppe Maria Coclite.

Travelling and rotating solutions close to shear flows

Ángel Castro, D. Lear

ICMAT

angelcastro@icmat.es

In this talk we will consider the existence of rotating solutions arbitrarily close (in some topology) to radial monotone decreasing vorticity for 2D Euler. In a paper by Bedrossian, Coti-Zelati and Vicol was shown that radial monotone decreasing vorticities are stable at the linear level, thus, our result shows that this phenomenon can break even for small perturbation. The problem is related with the stability of shear flows and the existence of stationary and traveling waves solution near them. We also review some results on this topic. This is a joint work with Daniel Lear.

Long wave instabilities of general shear flows for 2D viscous fluids

Michele Dolce, M. Colombo, R. Montalto, P. Ventura

EPFL

michele.dolce@epfl.ch

In 1959, Kolmogorov proposed to study the instability of the shear flow $(\sin(y), 0)$ in the vanishing viscosity regime in tori of different aspect ratios. This question was later resolved by Meshalkin and Sinai in the '60s. Generalizing their picture, we focus on instability properties for general shear flows $(U(y), 0)$ and we show that they always exhibit a long wave instability mechanism. This confirms previous findings by Yudovich in 1966 and is established through two independent approaches: one via the construction of Kato's isomorphism and one via normal forms. In both cases, unlike in many other applications of these methods, the corresponding operators are not small perturbations of a given simpler operator. This is a joint work with M. Colombo, P. Ventura and R. Montalto.

Stability of equilibria and bifurcations for a fluid-solid interaction problem

Clara Patriarca, D. Bonheure, G. P. Galdi

Université Libre de Bruxelles

clara.patriarca@ulb.be

We study certain significant properties of the equilibrium configurations of a coupled system S , consisting of an incompressible Navier Stokes fluid in an unbounded 3D domain interacting with a structure formed by a rigid body subject to undamped elastic restoring forces and torque around its rotation axis. The motion of S is driven by a uniform flow at spatial infinity, with constant dimensionless velocity λ . We show that if λ is below a critical value, λ_c (say), there is a unique and stable time-independent configuration, where the body is in equilibrium and the flow is steady. Successively, we investigate possible loss of uniqueness by providing necessary and sufficient conditions for the occurrence of a steady bifurcation at some $\lambda_s \geq \lambda_c$. This is a joint work with D. Bonheure (Université Libre de Bruxelles) and G.P. Galdi (University of Pittsburgh).

2D Navier-Stokes free boundary: nonnegative density and viscosity contrast

Francisco Gancedo

Universidad de Sevilla

fgancedo@us.es

This talk concerns the evolution of two incompressible, immiscible fluids in two dimensions, governed by the inhomogeneous Navier-Stokes equations. We present new global-in-time well-posedness results, showing the preservation of the natural $C^{1+\gamma}$ Hölder regularity of the moving interface, for $0 < \gamma < 1$. This is the first approach that allows for nonnegative density driven by a low-regularity initial velocity, while also remaining valid in the presence of a small viscosity jump.

Computer-assisted techniques for proving stability in PDEs

Gonzalo Cao-Labora

EPFL

`gonzalo.caolabora@epfl.ch`

This talk will explain how computer-assisted techniques can be used to prove stability (possibly up to a finite codimension) of PDE solutions. A key application is to demonstrate the existence of exact smooth self-similar solutions near numerically obtained approximations. This provides a mechanism to rigorously prove singularity formation without forcing, starting from a numerically computed profile. Other applications include the stability of blow-up formation for NLS equations and the stability of solitons. We will provide a brief overview of the problems where this technique is useful and then focus on a detailed application to a “toy linear operator”, going carefully through the mathematical arguments and outlining the code implementing the computer-assisted part.

Geometric traits in the incompressible Euler equations with variable density

Francesco Fanelli

BCAM

ffanelli@bcamath.org

This talk focuses on the analysis of the incompressible Euler equations with variable density. Their homogeneous counterpart, which is given by the classical incompressible Euler system, is well-known to be globally well-posed in the case of space dimension $d = 2$, both in the strong solutions framework and in the Yudovich (weak) solutions framework. No results of that kind are known in the case of density variations.

In this talk, we will show that both problems (that is, global well-posedness and weak solutions theory *à la Yudovich*) can be reduced to the study of a non-linear geometric quantity, which encodes the regularity of the velocity field along the level lines of the density.

Leapfrogging Motion in Fluid Dynamics

Zineb Hassainia

Universidad de Granada

zinebhassainia@ugr.es

In this talk, I will present recent results on the leapfrogging phenomenon in vortex dynamics for the Euler equations. We prove that, under suitable constraints, concentrated vortex patches exhibit leapfrogging behavior for all time. When viewed from a translating frame of reference, the dynamics of these patches correspond to a non-rigid, time-periodic motion. The analysis relies on KAM theory, which allows us to overcome the small divisors problem and to address the degeneracy in the time direction.

On the analyticity of the trajectories of the particles in the patch problem for some active scalar equations

Joan Mateu

Universitat Autònoma de Barcelona

joan.mateu@uab.cat

Let Ω be a bounded domain in R^n whose boundary is $C^{1,\gamma}$ for $\gamma \in (0, 1)$. Consider 2D Euler equation for the vorticity or the n-D aggregation equation in the case of the initial condition being a positive multiple of the characteristic function of Ω . In this talk we discuss on global in time analyticity of the flow generated by the velocity field which propagates the vorticity or density solution respectively. These results are obtained from a detailed study of the Beurling or Riesz transform, that represents derivatives of the velocity field. The precise estimates obtained for the solutions of an equation satisfied by the Lagrangian flow, are a key point in the development.

On the De Giorgi-Nash-Moser regularity theory for kinetic hypoelliptic operators

Annalaura Rebutti, F. Anceschi, H. Dietert, J. Guerand, A. Loher, C. Mouhot

Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences

annalaura.rebutti@mis.mpg.de

We present new results that extend the De Giorgi-Nash-Moser theory to a class of hypoelliptic equations naturally arising in kinetic theory. These operators are mathematically characterized by two parts: a diffusion part governed by the (fractional) Laplace operator in some set of variables and a first order operator that contains the directions of missing ellipticity. A key ingredient to prove our results is a Poincaré inequality, which we derive from the construction of suitable trajectories. The trajectories we rely on are quite flexible and allow us to consider equations with an arbitrary number of Hörmander commutators and whose diffusive part is either local (second-order) or nonlocal (fractional order). We later combine the Poincaré inequality with a $L^2 - L^\infty$ estimate, a Log-transformation and a classical covering argument (Ink-Spots Theorem) to deduce Harnack inequalities and Hölder regularity along the line of De Giorgi method.

This talk is based on a series of papers in collaboration with F. Anceschi, H. Dietert, J. Guerand, A. Loher and C. Mouhot.

Asymptotics of the Stokes problem close to solid contacts

Edoardo Bocchi, D. Bonheure, M. Hillairet

Politecnico di Milano

edoardo.bocchi@polimi.it

In the field of fluid-solid interactions, a crucial question is the description of the flow of a fluid confined between moving solid surfaces, either elastic or rigid. In this context, it is usual to consider the stationary Stokes problem, supplemented with boundary conditions that encode the motion of the surfaces. In this talk, I will present a variational method that allows to compute and rigorously justify the asymptotic expansion of the Stokes solution when the surfaces are close to isolated contacts. This talk is based on a joint work with D. Bonheure and M. Hillairet.

On the mathematical description of tumor growth

Rafael Granero

Universidad de Cantabria

rafael.granero@unican.es

In this talk we will present some new results and models on the mathematical description of multilayer tumor growth.

Sesión especial 14

Geometría Algebraica Aplicada y Computacional

Equipo organizador:

- *Pablo González-Mazón* (CUNEF Universidad)
- *Pierpaola Santarsiero* (Università di Bologna)
- *Raquel Tapia-Ramos* (Universidad de Cádiz)
- *Josué Tonelli-Cueto* (Johns Hopkins University)

Descripción

Muchos problemas en aplicaciones, como las redes de reacciones químicas, teoría del control y estadística entre otras muchas, se reducen a problemas con polinomios, esto es, problemas computacionales en geometría algebraica. Entender cómo resolver estos problemas de un modo eficiente y confiable es esencial para afrontar los desafíos en estas aplicaciones. En esta sesión, investigadores en geometría algebraica aplicada y computacional hablarán sobre los últimos desarrollos en este intercambio entre aplicaciones, geometría algebraica y computación.

Palabras clave: aplicaciones, computación, polinomios, geometría algebraica.

Programa

LUNES, 19 de enero

- 15:30 – 16:00 Elisenda Feliu (University of Copenhagen)
The Generic Geometry of Steady State Varieties of Reaction Networks
- 16:00 – 16:30 Luca Sodomaco (MPI MiS, Leipzig)
Higher-order Osculating Eigenvectors of Symmetric Tensors
- 16:30 – 17:00 Elvira Pérez-Callejo (Universidad de Valladolid)
An effective algorithm for algebraic integrability of polynomial foliations with bounded genus
- 17:00 – 17:30 Simon Telen (MPI MiS, Leipzig)
Toric amplitudes and universal adjoints

MARTES, 20 de enero

- 11:00 – 11:30 Carlos D'Andrea (Universitat de Barcelona)
Effective Pourchet's Theorem
- 11:30 – 12:00 Carles Checa (University of Copenhagen)
Effective criteria for birrationality of biquadratic polynomial maps
- 12:00 – 12:30 Javier Sendra Arranz (CUNEF University)
Hilbert schemes of points of singular curves
- 15:30 – 16:00 Marta Casanellas (Universitat Politècnica de Catalunya)
Distinguishing phylogenetic networks
- 16:00 – 16:30 Roser Homs Pons (Universitat Politècnica de Catalunya)
Maximum likelihood thresholds for colored Gaussian graphical models
- 16:30 – 17:00 Todes – Open Problem Sharing Discussion
I have a problem I need help with...
- 17:00 – 17:30 Mario González-Sánchez (Universidad de Valladolid)
Some advances on the Eisenbud-Goto conjecture for projective toric surfaces
- 18:00 – 18:30 Eduardo Sáenz de Cabezón (Universidad de La Rioja)
Involutively stable ideals
- 18:30 – 19:00 Chiara Meroni (ETH Institute for Theoretical Studies)
Rank-one convexity

The Generic Geometry of Steady State Varieties of Reaction Networks

Elisenda Feliu, Oskar Henriksson, Beatriz Pascual-Escudero

University of Copenhagen

efeliu@math.ku.dk

The mathematical formalism of the study of (bio)chemical reaction networks goes back to at least the works of Feinberg, Horn and Jackson in the 70ies. However, several fundamental questions about the positive part of the algebraic varieties defined by the steady state equations remained unsolved. In this talk, I will describe several properties that these semialgebraic sets display generically with respect to the parameter values. The main message is that the generic geometries of the semialgebraic sets and the complex algebraic variety agree, to a great extent. I will address in particular generic finiteness of steady states, nondegeneracy, toricity, absolute concentration robustness, and the nondegenerate multistationarity conjecture.

References

- [1] E. Feliu, O. Henriksson, B. Pascual-Escudero (2025). Generic consistency and nondegeneracy of vertically parametrized systems. *Journal of Algebra* 677, 630–666.
- [2] E. Feliu, O. Henriksson, B. Pascual-Escudero (2024+). The generic geometry of steady state varieties. [arXiv:2412.17798](https://arxiv.org/abs/2412.17798)

Higher-order Osculating Eigenvectors of Symmetric Tensors

Luca Sodomaco, Sandra Di Rocco, Kemal Rose

MPI MiS, Leipzig

luca.sodomaco@mis.mpg.de

Consider the space of real n -ary symmetric tensors of order d , equipped with the Bombieri-Weyl inner product. Let X be the affine cone of real symmetric tensors of rank at most one. For a fixed real symmetric tensor f , we study the distance function $d_{f,X}$ from f restricted to X . When f is generic, the number of complex critical points of $d_{f,X}$ is finite and constant, and coincides with the Euclidean Distance degree of X with respect to the Bombieri-Weyl inner product.

In this talk, we describe the locus of symmetric tensors f with at least one critical point x of $d_{f,X}$ which is k -osculating for some integer $k > 1$, meaning that $f - x$ is orthogonal to the k -th osculating space of X at x . This leads to the notion of k -osculating eigenvector of f .

An effective algorithm for algebraic integrability of polynomial foliations with bounded genus

Elvira Pérez-Callejo, Carlos Galindo, Francisco Monserrat

Universidad de Valladolid

elvira.perez@uva.es

Characterizing algebraic integrability of planar polynomial foliations is a classical and open problem. This talk presents an algorithm for effective algebraic integrability using extensions to rational surfaces. It decides whether a polynomial foliation on the complex plane possesses a rational first integral of given genus $g \neq 1$, and computes this integral if it exists.

The method relies on geometrical objects obtained from the dicritical reduction of singularities of the extended foliation, specifically a certain $\mathbb{Q}$ -divisor $T_{\mathcal{F}}$ on the resulting surface.

References

- [1] C. Galindo, F. Monserrat, E. Pérez-Callejo (2025). Algebraic integrability with bounded genus. *Journal of Differential Equations* 440 (Part 2), 113466.

Toric amplitudes and universal adjoints

Simon Telen

MPI MiS, Leipzig

`simon.telen@mis.mpg.de`

A toric amplitude is a rational function associated to a simplicial polyhedral fan. The definition is inspired by scattering amplitudes in particle physics. We prove algebraic properties of such amplitudes and study the geometry of their zero loci. These hypersurfaces play the role of Warren's adjoint via a dual volume interpretation. We investigate their Fano schemes and singular loci via the nef cone and toric irrelevant ideal of the fan.

References

- [1] S. Telen (2025+). Toric Amplitudes and Universal Adjoints. [arXiv:2504.00897](https://arxiv.org/abs/2504.00897)

Effective Pourchet's Theorem

Carlos D'Andrea, Teresa Cortadellas Benítez, Ana Belén de Felipe, Joel Hurtado,
Eulàlia Montoro

Universitat de Barcelona

cdandrea@ub.edu

It has been proven by Y. Pourchet in [2] that any positive polynomial $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ can be written as a sum of 5 squares of polynomials in $\mathbb{Q}[x]$, and that the number 5 is optimal in the sense that there are positive polynomials which cannot be written as a sum of 4 or less squares.

Recently, an algorithm was proposed in [1] with a conjecture that it may always produce an optimal decomposition as a sum of 5 squares.

In this presentation, we will review the problem and its algorithmic approach, and show that the conjecture in [1] is not correct. We also explore further generalizations of the results given there.

References

- [1] V. Magron, P. Koprowski, T. Vaccon (2023). Pourchet's theorem in action: decomposing univariate nonnegative polynomials as sums of five squares, en *Proceedings of the International Symposium on Symbolic & Algebraic Computation (ISSAC 2023)*, ACM, 425–433.
- [2] Y. Pourchet (1971). Sur la représentation en somme de carrés des polynômes à une indéterminée sur un corps de nombres algébriques. *Acta Arith.* 19, 89–104.

Effective criteria for birrationality of biquadratic polynomial maps

Carles Checa, Pablo Mazón

University of Copenhagen

ccn@math.ku.dk

A biquadratic rational map is a map $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ whose entries are biquadratic polynomials. Some of the algebraic aspects related to determining when these type of maps are birational had been studied, specially with a view towards applications in geometric design. In our work, we give a geometric criterion, based on understanding the relation between the base loci of the map and its inverse and the syzygies of the entries of the map. We will make special emphasis in the use of exterior algebra methods in the proofs. We will also discuss other known cases of birationality of maps defined over toric varieties.

Hilbert schemes of points of singular curves

Javier Sendra Arranz, Ángel David Ríos Ortiz

CUNEF University

javier.sendraarranz@cunef.edu

The Hilbert scheme of m points on a variety X parametrizes zero-dimensional subschemes of length m in X . Since their introduction by Grothendieck, these spaces have become central not only in algebraic geometry but also in areas like tensor theory and computer vision. A major challenge in studying Hilbert schemes is their intricate geometry, as they satisfy Murphy's Law. For smooth curves, the Hilbert scheme is irreducible and smooth—a property that fails with singular curves. In this joint work with Ángel David Ríos Ortiz, we study Hilbert schemes of points on curves with rational n -fold singularities. We describe their irreducible components, explore their combinatorics and singularities, and show they are reduced.

Distinguishing phylogenetic networks

Marta Casanellas, Jesús Fernández-Sánchez, Elizabeth Gross, Ben Hollering, Seth Sullivant

Universitat Politècnica de Catalunya

marta.casanellas@upc.edu

One of the prior steps to perform inference on phylogenetic networks is ensuring that the phylogenetic network can be identified from the distributions generated by a Markov process on it. Many different authors have provided equations that allow distinguishing a phylogenetic network from another. These equations have been usually obtained by computational algebra software for small networks evolving under simple models such as CFN, JC69, K80 or K81. In this talk we will explain how to obtain equations for networks evolving under equivariant models (which include the previous but also the general Markov model and other submodels) based on rank conditions from flattening matrices. These equations can be used to prove that certain networks are distinguishable.

Maximum likelihood thresholds for colored Gaussian graphical models

*Roser Homs Pons, Olga Kuznetsova, Bernadette Stolz, Aida Maraj, Danai Deligeorgaki,
Joe Johnson, Bryson Kagy*

Universitat Politècnica de Catalunya

roser.homs@upc.edu

Colored Gaussian graphical models are statistical models arising from graphs with a coloring in its vertices and edges. We study maximum likelihood thresholds (MLT) for these models: the minimum number of observations that ensure existence of the maximum likelihood estimator. We extend known results for MLT to the colored setting, determine thresholds for certain families graphs and implement algorithms that exploit the underlying algebraic geometry.

I have a problem I need help with... –Open Problem Sharing Discussion

Everyone

In this slot, attendees to the session can share mathematical problems, related to the session's topic, they want to share for collaborating with other attendees.

Some advances on the Eisenbud-Goto conjecture for projective toric surfaces

Mario González-Sánchez, Ignacio García-Marco, Philippe Gimenez, Mario González-Sánchez

Universidad de Valladolid

`mario.gonzalez.sanchez@uva.es`

In 1984, Eisenbud and Goto conjectured that the Castelnuovo-Mumford regularity of any reduced and irreducible projective variety was upper bounded by its degree. Over the years, this conjecture was proven true in many cases, e.g. for curves, until 2017, when McCullough and Peeva proved it false in general. However, the conjecture remains open for projective toric varieties. An affirmative answer has been found for smooth toric varieties of any dimension, and many people still believe it is true. In this talk, we will discuss recent progress in proving the conjecture for simplicial toric surfaces using techniques from additive combinatorics.

Involutively stable ideals

Eduardo Sáenz de Cabezón, Rodrigo Iglesias

Universidad de La Rioja

esaenz-d@unirioja.es

We define involutively stable monomial ideals as those ideals whose minimal monomial generating set is at the same time an involutive basis with respect to a certain involutive division. In this talk we study involutively stable ideals with respect to the Pommaret and Janet divisions, and relate them to several important properties of monomial ideals, in particular, componentwise linearity.

Rank-one convexity

Chiara Meroni

ETH Institute for Theoretical Studies

chiara.meroni@eth-its.ethz.ch

Rank-one convexity is a relevant and wild notion in multivariate calculus of variations. We prove that the rank-one convex hull of finitely many 2×2 triangular matrices is a semialgebraic set, defined by linear and quadratic polynomials. We present explicit constructions for five-point configurations and offer evidence suggesting that a similar semialgebraic characterization does not hold in the more general setting of directional convexity.

Sesión especial 15

Geometría Algebraica y Singularidades

Equipo organizador:

- *Clementa Alonso González* (Universidad de Alicante)
- *Carlos Galindo Pastor* (Universitat Jaume I)
- *Julio José Moyano Fernández* (Universitat Jaume I)
- *Juan José Nuño Ballesteros* (Universitat de València)

Descripción

Esta sesión está promovida por la Red de Geometría Algebraica y Singularidades (RGAS). La RGAS está reconocida por el MICIU desde el año 2016, está financiada actualmente (RED2024-153610-T) y está formada por más de 120 investigadores integrados en 19 proyectos de investigación financiados por el MICIU y organizados en 14 nodos.

Anualmente celebra al menos una reunión científica que sirve también como reunión anual de seguimiento de la Red. Como ya se ha hecho con anterioridad, los años en los que se celebra el Congreso bianual de la RSME se intenta que dicha reunión se enmarque dentro de la misma con un triple objetivo: - Presentar los recientes avances en el ámbito de la Geometría Algebraica y las Singularidades - Apoyar las actividades de la RSME en cuanto a difusión y visibilidad científica de las matemáticas en España. - Hacer visible la Red y su investigación en el contexto nacional La información completa de la Red se puede consultar en su página web: <https://blogs.mat.ucm.es/rgas/>

Palabras clave: Geometría Algebraica; Singularidades

Programa

LUNES, 19 de enero

- 15:30 – 16:00 Evelia R. García Barroso (Universidad de La Laguna)
On the topology of the generic polar curve of a branch
- 16:00 – 16:30 Ana Belén de Felipe (Universitat Politècnica de Catalunya)
Polars in arbitrary characteristic
- 16:30 – 17:00 Cinzia Villa (Universitat de València)
Resolución de inestabilidades
- 17:00 – 17:30 Patricio Almirón Cuadros (Universidad de Valladolid)
Familias de curvas planas equisingulares con número de Tjurina constante

MARTES, 20 de enero

- 11:00 – 11:30 Abraham del Valle Rodríguez (Universidad de Sevilla)
Euler-homogeneidad fuerte y Saito-holonomicidad en hipersuperficies complejas
- 11:30 – 12:00 Ángel Luis Muñoz Castañeda (Universidad de León)
On the universal moduli stack of line bundles. Geometry and applications
- 12:00 – 12:30 Ana Peón Nieto (Universidad de Santiago de Compostela)
Paisajes bamboleantes: fibrados wobbly y su geometría
- 15:30 – 16:00 José Ignacio Cogolludo-Agustín (Universidad de Zaragoza)
The Geometric Morphism Problem
- 16:00 – 16:30 Carlos-Jesús Moreno-Ávila (Universidad de Extremadura)
Valuative Seshadri constants and Newton–Okounkov bodies in relation to the Nagata conjecture
- 16:30 – 17:00 Yue Yu (Universitat Autònoma de Barcelona)
The number of vertices of Newton–Okounkov polygons and Picard number
- 17:00 – 17:30 Mario Morán Cañón (Universidad Autónoma de Madrid)
General components of the jet schemes
- 18:00 – 18:30 Guillermo Sánchez Arellano (Universidad Complutense de Madrid)
H-principios locales para relaciones en derivadas parciales holomorfas
- 18:30 – 19:00 Alba Larraya Sancho (BCAM - Basque Center for Applied Mathematics)
Ataques CCA sobre esquemas basados en lattices

Familias de curvas planas equisingulares con número de Tjurina constante

Patricio Almirón Cuadros

Departamento de Álgebra, Análisis, Geometría y Topología , Universidad de Valladolid

palmiron@uva.es

El número de Tjurina de una curva plana es uno de los invariantes analíticos más importantes de una curva plana. En general, dado un tipo topológico es difícil determinar qué condiciones topológicas determinan si el número de Tjurina es constante en esa clase. Aparte de ejemplos obvios donde solamente existe una única clase analítica pocas familias de curvas planas se conocen que tengan número de Tjurina constante fijado su tipo topológico. De hecho, hasta ahora solamente eran conocidos dos familias concretas de curvas irreducibles. En esta charla presentaré un trabajo conjunto con Marcelo E. Hernandez en el que proporcionamos una familia de curvas planas reducidas con dos ramas que tienen un número de Tjurina constante en su clase de equisingularidad, junto con una fórmula cerrada para dicho número en términos de datos topológicos. Esta constituye la primera familia de curvas planas no irreducibles con más de una clase analítica y número de Tjurina constante.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Marcelo E. Hernandez. Está parcialmente financiado por los proyectos RYC2021-034300-I por MI-CIU/AEI/10.13039/501100011033, y por European Union NextGenerationEU/PRTR. Durante la elaboración del trabajo también se ha recibido financiación del programa IMAG–Maria de Maeztu grant CEX2020-001105-M/AEI/10.13039/501100011033 y del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades PID2020-114750GB-C32/AEI/10.13039/501100011033.

The Geometric Morphism Problem

José Ignacio Cogolludo-Agustín, Eva Elduque

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

jicogo@unizar.es

The purpose of this talk is to connect and unify two types of results regarding the structure of quasi-projective groups, that is, fundamental groups of quasi-projective manifolds. Consider the following well-known problem, which we will refer to as the Geometric Morphism Problem.

[Geometric Morphism Problem] Let U be a quasi-projective manifold and $\psi : \pi_1(U) \rightarrow G$ be an epimorphism to a smooth complex curve group G with finitely generated kernel. Determine when/if there exists a morphism $F : U \rightarrow C$ to a smooth complex curve C realizing ψ , that is, such that $\psi = F_* : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(C) = G$, up to isomorphism in $\pi_1(C)$.

We will state an extension of this problem using orbifold structures. In particular, denote by $\mathbb{G}_{g,(r,\bar{m})}$ the orbifold fundamental group of a Riemann surface of genus g with r points removed and s orbifold points with orders $\bar{m} = (m_1, \dots, m_s)$. One can state the following analogue of the Geometric Morphism Problem.

[Geometric Orbifold Morphism Problem] Let U be a quasi-projective manifold and $\psi : \pi_1(U) \rightarrow \mathbb{G}_{g,(r,\bar{m})}$ be an epimorphism with finitely generated kernel. Determine when/if there exists an orbifold morphism $F : U \rightarrow C_\varphi$ to a smooth complex curve C with orbifold structure C_φ realizing ψ , that is, such that $\psi = F_* : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(C_\varphi) = \mathbb{G}_{g,(r,\bar{m})}$, up to isomorphism in $\pi_1^{\text{orb}}(C_\varphi)$.

We will discuss an answer to the Geometric Orbifold Morphism Problem in terms of the following invariant of the group $\chi_{g,(r,\bar{m})} := 2 - 2g - r - \sum_{i=1}^s 1 - \frac{1}{m_i}$.

Theorem: The Geometric Orbifold Morphism Problem has a positive answer for $\mathbb{G}_{g,(r,\bar{m})}$ if $\chi_{g,(r,\bar{m})} < 0$. Moreover, the multiple fibers of F are determined by $\bar{m}$ and one such F is uniquely determined up to isomorphism of algebraic varieties in the target.

Acknowledgments. The authors are partially supported by PID2020-114750GB-C31, funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033. The first author is also partially funded by the Departamento de Ciencia, Universidad y Sociedad del Conocimiento of the Gobierno de Aragón (Grupo de referencia E22_20R “Álgebra y Geometría”). The second author is partially supported by the Ramón y Cajal Grant RYC2021-031526-I funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by the European Union NextGenerationEU/PRTR

Polars in arbitrary characteristic

Ana Belén de Felipe

Departamento de Matemáticas, Universitat Politècnica de Catalunya

ana.belen.de.felipe@upc.edu

We present a decomposition in the spirit of Eggers of the polar of a power series in two variables with coefficients in an algebraically closed field of arbitrary characteristic.

Acknowledgments. This is joint work with Evelia R. García Barroso and Janusz Gwoździewicz.

Euler-homogeneidad fuerte y Saito-holonomicidad en hipersuperficies complejas

Abraham del Valle Rodríguez

Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla

adelvalle2@us.es

En esta charla introduciremos y motivaremos dos propiedades interesantes en el estudio de las singularidades de hipersuperficies complejas: la Euler-homogeneidad fuerte y la Saito-holonomicidad. Para la primera de ellas, daremos condiciones necesarias y suficientes en términos de unos ciertos ideales de Fitting. Para la segunda, introduciremos nuevas versiones de la definición que generalizarán otras propiedades anteriormente definidas sólo para un tipo particular de hipersuperficies: los divisores libres. Estas nociones también serán caracterizadas en términos de los mismos ideales, lo que nos permitirá relacionarlas con la Euler-homogeneidad y extender algunos resultados que sólo se conocían en el caso libre. Finalmente, contaremos cómo estos criterios nos han permitido avanzar en el estudio de una conjetura planteada en 2002, permitiendo demostrar su veracidad en nuevos casos.

Agradecimientos. Trabajo parcialmente financiado por la beca predoctoral PAIDI 2021 de la Junta de Andalucía (núm. PREDOC_00485) y por el proyecto de investigación PID2020-114613GB-I00.

On the Topology of the Generic Polar Curve of a Branch

Evelia R. García Barroso

Departamento de Matemáticas, Estadística e I.O. & IMAULL, Universidad de La Laguna

ergarcia@ull.es

We study, for complex plane branches of genus one, the topological type of their generic polar curve, in terms of the semigroup and the Zariski invariant of the branch. We improve some results given by Casas-Alvero in 2023, since we refine the topological type fixed for the branch by filtering through the possible values of the Zariski invariants.

Acknowledgments. This work is in collaboration with Marcelo E. Hernandez (Universidade de Maringá, Brazil) and M. Fernando Hernández Iglesias (PUCP and UNMSM, Lima, Peru).

Ataques CCA sobre esquemas basados en lattices

Alba Larraya Sancho

BCAM - Basque Center for Applied Mathematics

alarraya@bcamath.org

En la charla empezaremos con el problema Learning With Errors, introducido por Oded Regev. Este problema es la base de la seguridad en una parte de los sistemas criptográficos post-cuánticos que se están desarrollando para afrontar la amenaza de la computación cuántica. A continuación presentaremos dos esquemas criptográficos: los esquemas completamente homomórficos y CRYSTALS-Kyber. Explicaremos los ataques CCA sobre los sistemas homomórficos y las distintas capas de seguridad de Kyber y algunos ataques a los que es vulnerable cuando no está bien implementado.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Miguel Ángel Marco Buzunáriz y Alba Hernández Costoya. Proyecto parcialmente financiado por E22_{23R} y PID2020-114750GB-C31.

General components of the jet schemes

Mario Morán Cañón

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid e ICMAT

mario.moran@uam.es

We will explain how the topological structure of the jet schemes of an algebraic variety encodes relevant information about the singularities of the variety and the scheme structure of its arc scheme. In this sense, we will present a strong connection between a family of irreducible components of the jet schemes, called the general components, the nilpotent functions of the arc scheme, and blow-ups of the base variety at certain centers.

Acknowledgments. This is part of a joint project with Julien Sebag. It is partially supported by grant PID2022-138916NB-I00, funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by ERDF A way of making Europe.

Valuative Seshadri constants and Newton–Okounkov bodies in relation to the Nagata conjecture

Carlos-Jesús Moreno-Ávila

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura

`cjmoravi@unex.es`

The Nagata conjecture arises as a result of the negative answer to the 14th Hilbert problem [5]. Despite many efforts this conjecture remains open after more than 60 years. There exist several reformulations using interesting objects in Algebraic Geometry as Seshadri constants, Mori cone and irrational nef divisors. Recently, a valuative Nagata conjecture has been stated in [2, 4]. This conjecture involves a (real) plane valuation ν of the projective plane and a constant named Seshadri-type constant, denoted $\hat{\mu}(\nu)$ and introduced in [1]. In addition, the valuative Nagata conjecture implies the Nagata conjecture and asymptotic evidences of its trueness in some particular cases have been proved in [4]. In this talk we introduce a natural Seshadri constant for a smooth projective surface S , a nef divisor on S and a divisorial plane valuation of S and we show some of their properties. These results will help us to give several equivalent geometrical statements to the valuative Nagata conjecture for divisorial plane valuations.

References

- [1] S. Boucksom, A. Küronya, C. Maclean, T. Szemberg, Vanishing sequences and Okounkov bodies, *Math. Ann.*, 361 (2015), 811–834.
- [2] M. Dumnicki, B. Harbourne, A. Küronya, J. Roé, T. Szemberg, Very general monomial valuations of $\mathbb{P}^2$ and a Nagata type conjecture, *Comm. Anal. Geom.*, 25 (2017) 125–161.
- [3] C. Galindo, F. Monserrat, C.-J. Moreno-Ávila, J.-J. Moyano-Fernández, On the valuative Nagata conjecture, *Res. Math. Sci.* 12, 18 (2025). <https://doi.org/10.1007/s40687-025-00500-2>
- [4] C. Galindo, F. Monserrat, J. J. Moyano-Fernández, Minimal plane valuations, *J. Alg. Geom.*, 27 (2018), 751–783.
- [5] M. Nagata. On the 14-th problem of Hilbert. *Amer. J. Math.*, 81 (1959), 766–772.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Carlos Galindo, Francisco Monserrat y Julio José Moyano Fernández. Proyecto parcialmente financiado por el proyecto de investigación PID2022-138906NB-C22 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033, así como por la Universitat Jaume I, proyectos GACUJIMA/2024/03 y UJI-B2021-02.

On the universal moduli stack of line bundles with level structures. Geometry and applications

Ángel Luis Muñoz Castañeda,

Departamento de Matemáticas, Universidad de León

amunc@unileon.es

The study of the moduli space of line bundles with level structures over smooth projective curves has its origins in a work of Raynaud [7], who introduced it as an auxiliary object to investigate the deformation theory of the Jacobian. Since then, its study has become central to many diverse areas. In this talk, the main object of interest will be the universal moduli stack $L_{d,g,n}$ of line bundles with level structures of degree d over $M_{g,n}$. We will examine some geometric and structural properties, focusing in particular on the existence of a canonical immersion into $Gr(k, n) \times M_{g,n}$, for some k depending on the degree. The results we will present have meaningful applications and consequences. For instance, in the case $g = 0$, the described immersion gives rise to a family of embeddings of $M_{0,n}$ into the Grassmannian $Gr(k, n)$, parametrized by the algebraic group $\mathbb{G}_m^{n-1}$, which is of interest in invariant theory. On the other hand, the results can also be interpreted in the context of code-based cryptography, providing theoretical support for the widely assumed hypothesis that geometric Goppa codes are distinguishable from arbitrary linear codes.

References

- [1] A. Álvarez, J. M. Muñoz (1998). Canonical immersions of moduli schemes of vector bundles into Grassmannians, en R. Rodríguez et al., editores, *Workshop on Abelian Varieties and Theta Functions (Morelia 1996)*, Ap. Mat. Serie Inv. 13., vol 155, Sociedad Matemática Mexicana, 87–95.
- [2] B. Howard, J. Millson, A. Snowden and R. Vakil (2009). The equations for the moduli space of points on the line. *Duke Mathematical Journal*, 146(2):175–226.
- [3] I. Márquez-Corbella, E. Martínez-Moro, and R. Pellikaan (2014). On the unique representation of very strong algebraic geometry codes. *Designs, Codes, and Cryptography*, 70(1-2):215–230.
- [4] R. J. McEliece (1978). A public-key cryptosystem based on algebraic coding theory. DSN Progress Report https://tmo.jpl.nasa.gov/progress_report/42-44/44N.PDF.
- [5] D. Mumford (1969) *Varieties defined by quadratic equations*. Springer Berlin Heidelberg.
- [6] A. L. Muñoz Castañeda (2025). Universal moduli of level structures, Goppa morphism and cryptography, *Submitted*, 36 pp.
- [7] M. Raynaud (1970). Spécialisation du foncteur de Picard. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 38:27–76.

Acknowledgments. The author wishes to thank Prof. F. J. Plaza Martín for his helpful comments and suggestions. This work was initiated under the research project TED2021-131158A-I00, funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by the European Union “NextGenerationEU”/PRTR. Subsequent improvements and extensions have been supported by the project PID2023-150787NB-I00, funded by MICIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE.

Paisajes bamboleantes: fibrados wobbly y su geometría

Ana Peón-Nieto

Departamento de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela

ana.peon@usc.es

La historia de los fibrados wobbly se remonta a los años 80, cuando Drinfeld, motivado por el programam de Langlands geométrico, definió los fibrados muy estables. El término wobbly (bamboleante), acuñado después por Donagi-Pantev, se refiere a fibrados que no son muy estables. Esos autores desarrollaron un programa para probar Langlands geométrico mediante fibrados de Higgs. El trabajo de Hausel–Hitchin, generalizando estos conceptos a fibrados de Hodge, ha permitido entender nuevos aspectos de la geometría del espacio de móduli de fibrados de Higgs, desde invariantes geométricos hasta simetría espejo, empleando fibrados de Hodge muy estables. En esta charla, me centraré en los fibrados wobbly, para quienes las técnicas actuales fallan, presentando algunos resultados de clasificación, así como sobre su papel en el programa de Donagi–Pantev.

Referencias

- [1] R. Donagi and T. Pantev, *Geometric Langlands and non-abelian Hodge theory*, Surveys in differential geometry, Vol. XIII. Geometry, analysis, and algebraic geometry: forty years of the Journal of Differential Geometry, 85–116, International Press, Somerville, MA, 2009.
- [2] T. Hausel and N. Hitchin, *Very stable Higgs bundles, virtual equivariant multiplicity and mirror symmetry*, Invent. math. 228, 893–989 (2022). <https://doi.org/10.1007/s00222-021-01093-7>
- [3] G. Laumon, *Un analogue global du cône nilpotent*, Duke Math. Jour. 57 (1988), 647–671.
- [4] C. Pauly and A. Peón-Nieto, *Very stable bundles and properness of the Hitchin map*, Geom Dedicata 198, 143–148 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10711-018-0333-6>
- [5] A. Peón-Nieto, *Wobbly moduli of chains, equivariant multiplicities and $U(n_0, n_1)$ -Higgs bundles*, Preprint, [arXiv:2303.08563](https://arxiv.org/abs/2303.08563) [math.AG].
- [6] A. Peón-Nieto, *Equality of the Wobbly and Shaky Loci*, International Mathematics Research Notices, Volume 2024, Issue 8, April 2024, Pages 6710–6730, <https://doi.org/10.1093/imrn/rnad254>

H-principios locales para relaciones en derivadas parciales holomorfas

Guillermo Sánchez Arellano, Luis Giraldo

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad Complutense de Madrid

guillermo_sanchez@ucm.es

The goal of the h-principle theory is to understand when a geometric problem is governed by the laws of differential topology. When topology (more flexible) overrides geometry (more rigid), we say that the h-principle holds in that context.

The identity principle and the resulting lack of partitions of unity endow complex geometry with great rigidity. However, there is a class of complex manifolds—Stein manifolds—in which the Oka principle, a type of h-principle for holomorphic functions, holds. The flexible properties of Stein manifolds have been exploited by F. Forstnerič and M. Slapar to establish h-principles for holomorphic immersions and submersions, and by F. Forstnerič for complex contact forms. In this talk, we will explore how these techniques can be abstracted to obtain more general h-principles in this type of complex manifolds.

References

- [1] F. Forstnerič, M. Slapar (2007). Stein structures and holomorphic mappings. *Mathematische Zeitschrift*, 256.3, 615–646.
- [2] F. Forstnerič (2020). h-principle for complex contact structures on Stein manifolds. *The Journal of Symplectic Geometry*, 18.3, 733–767.
- [3] L. Giraldo, G. Sánchez-Arellano (2025). Local HH-principles for holomorphic partial differential relations. *Mathematische Nachrichten*, 298.5, 1521–1548.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Luis Giraldo Suárez. Proyecto parcialmente financiado por PID2021-126124NB-I00, PID 2019-108936GB-C21 y PR27/21-029.

Resolución de inestabilidades

Cinzia Villa

Departament de Matemàtiques, Universitat de València

cinvi@alumni.uv.es

Estudiamos la resolución de inestabilidades de un multigerme $f : (X, S) \rightarrow (Y, 0)$, considerando por un lado los resultados de Belotto Da Silva, Bierstone y Milman, y por otro lado teniendo en cuenta el trabajo de Duco van Straten. En particular, estamos interesados en definir una *buena* resolución de inestabilidades que nos devuelva información topológica a través del grafo de resolución.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Juan J. Nuño-Ballesteros y Guillermo Peñafort Sanchis. Parcialmente financiado por el Proyecto PID2021-124577NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por “FEDER Una forma de hacer Europa”.

The number of vertices of Newton–Okounkov polygons and Picard number

Yue Yu

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona

Yue.Yu4@autonoma.cat

Newton-Okounkov bodies serve as a bridge between algebraic geometry and convex geometry, enabling the application of combinatorial and geometric methods to the study of linear systems on algebraic varieties. As an application, let S be an algebraic surface and let $mv(S)$ denote the maximum number of vertices of the Newton-Okounkov bodies of S . We will show how $mv(S)$ can estimate the Picard number to a certain extent, particularly in the case of K3 surfaces.

Sesión especial 16

Geometría Convexa

Equipo organizador:

- *María Ángeles Hernández Cifre* (Universidad de Murcia)
- *Jesús Yepes Nicolás* (Universidad de Murcia)

Descripción

La Geometría Convexa es fundamental en muchas ramas de las Matemáticas, tanto puras como aplicadas. Recientes avances destacan además la interacción entre Geometría Convexa y Análisis Convexo Asintótico, con resultados tales como teoremas de límite central para cuerpos convexos y desigualdades de tipo Sobolev logarítmicas con respecto a probabilidades log-cóncavas, mostrando un fuerte sabor geométrico probabilístico. Estas conexiones revelan vínculos entre desigualdades geométricas clásicas y la teoría del transporte óptimo.

La sesión especial busca fomentar la investigación en Geometría Convexa y su relación con áreas cercanas, tales como la Geometría Discreta y la Integral. Asimismo, se pretende contar con ponentes en distintas etapas de su carrera investigadora, incluyendo desde doctorandos y postdocs en una fase inicial, hasta investigadores sénior, con una dilatada trayectoria científica, asegurando también un balance de género. Finalmente, se prevé que los participantes aporten perspectivas diversas, reflejando la variedad de temáticas presentes en Convexidad.

Keywords: Convex bodies; Geometric and functional inequalities; Isoperimetric problems; Integral Geometry; Discrete methods; Lattices and Discrete Geometry.

Programa

JUEVES, 22 de enero

- | | |
|---------------|---|
| 11:00 – 11:30 | Manuel Ritoré (Universidad de Granada)
<i>Pansu-Wulff shapes in Carnot groups</i> |
| 11:30 – 12:00 | César Rosales (Universidad de Granada)
<i>El problema isoperimétrico anisotrópico en dominios convexos</i> |
| 12:00 – 12:30 | Francisco Marín Sola (CUD)
<i>On general versions of the Petty projection inequality</i> |
| 12:30 – 13:00 | Lidia Gordo Malagón (Universidad de Murcia)
<i>Mean type successive radii of convex bodies</i> |
| | |
| 15:30 – 16:00 | Eugenia Saorín Gómez (Universität Bremen)
<i>Common projections of convex bodies and inequalities within the L_p Brunn-Minkowski theory</i> |
| 16:00 – 16:30 | David Alonso-Gutiérrez (Universidad de Zaragoza)
<i>Una versión funcional general de la desigualdad de Grünbaum</i> |
| 16:30 – 17:00 | Julia Sánchez-Loscertales (Universidad de Zaragoza)
<i>Sobre la desigualdad de Zhang para funciones log-cóncavas</i> |
| 17:00 – 17:30 | Eduardo Lucas Marín (Universidad de Murcia)
<i>Bridging volume and lattice enumeration via mixed isoperimetric inequalities</i> |
| | |
| 18:00 – 18:30 | Bernardo González (Universidad de Murcia)
<i>Extremalidad y casos degenerados entre algunos funcionales geométricos</i> |
| 18:30 – 19:00 | Julián Haddad (Universidad de Sevilla)
<i>Planar radial mean bodies are convex</i> |

VIERNES, 23 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:30 | Francisco Santos (Universidad de Cantabria)
<i>Lattice zonotopes and the lonely-runner conjecture</i> |
| 11:30 – 12:00 | Luz Roncal (BCAM)
<i>Unique continuation: from discrete to continuous</i> |
| 12:00 – 12:30 | Gil Solanes (Universitat Autònoma de Barcelona)
<i>Integral geometry in pseudo-riemannian spaces</i> |

Pansu-Wulff shapes in Carnot groups

Manuel Ritoré

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

ritore@ugr.es

We describe recent work related to the minimizers of the perimeter under a volume constraint in Carnot groups with a sub-Finsler structure, focusing on the case of the Heisenberg groups.

El problema isoperimétrico anisotrópico en dominios convexos

César Rosales

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

crosales@ugr.es

Estudiaremos el problema consistente en minimizar el perímetro anisotrópico interior sobre conjuntos de volumen dado dentro de un convexo. Revisaremos brevemente cuáles son las soluciones en dominios concretos. Después, analizaremos las regiones isoperimétricas y la función perfil isoperimétrico en cualquier dominio convexo. Nos centraremos en obtener propiedades de concavidad del perfil y de conexión de las soluciones, así como en comparaciones óptimas respecto de conos convexos. En particular, las técnicas empleadas proporcionarán una prueba rápida de que las únicas soluciones del problema en el espacio euclídeo son las formas de Wulff.

Referencias

- [1] C. Rosales (2025). On the anisotropic partitioning problem in Euclidean convex domains. Submitted (arxiv.org/abs/2504.08345).

On general versions of the Petty projection inequality

Francisco Marín Sola

Departamento de Ciencias, CUD San Javier

[francisco.msola@cud.upct.es](mailto:francisco.msola@ cud . upct . es)

The classical Petty projection inequality is an affine isoperimetric inequality which constitutes a cornerstone in the affine geometry of convex bodies. By extending the polar projection body to an inter-dimensional operator, Petty's inequality was generalized to the so-called (L_p, Q) setting, where Q is an m -dimensional compact convex set. In this talk, we will present an extension of the (L_p, Q) Petty projection inequality for rotationally invariant measures with concavity properties, namely, those with γ -concave density (for $\gamma \geq -1/(nm)$). If time permits, we will also discuss empirical analogues of this inequality.

Mean type successive radii of convex bodies

Lidia Gordo Malagón

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

lidia.gordom@um.es

For a convex body K of the n -dimensional Euclidean space, we define the successive outer and inner radii, denoted respectively by $R_i(K)$ and $r_i(K)$, $i = 1, \dots, n$, in the following way: $R_i(K)$ is the smallest radius of a solid cylinder with i -dimensional spherical cross section containing K , whereas $r_i(K)$ is the radius of the greatest i -dimensional ball contained in K . These measures generalize the well-known functionals diameter, minimal width, circumradius and inradius of K , and they can also be defined via the circumradius/inradius of suitable projections/sections of the convex body K .

Our aim in this talk is to present the known results as well as some extensions and recent developments about them. Furthermore, the relation between the different successive radii and other relevant geometric measures, like the volume or the Gaussian measure, will be also pointed out.

This is a joint work with María Á. Hernández Cifre.

Common projections of convex bodies and inequalities within the L_p Brunn-Minkowski theory

Eugenia Saorín Gómez

ALTA Institute, Universität Bremen

esaoring@uni-bremen.de

In this talk we will present some recent improvements of the L_p -Brunn-Minkowski inequality when the involved convex bodies are assumed to share a common projection onto a hyperplane.

In the classical Brunn-Minkowski theory, if the convex bodies K, L are such that their projections onto a hyperplane coincide, namely $P_{u^\perp}(K) = P_{u^\perp}(L)$, for some $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, then the Brunn-Minkowski inequality *linearizes* for all $\lambda \in (0, 1)$, i.e., it reads

$$\text{vol}_n((1 - \lambda)K + \lambda L) \geq (1 - \lambda)\text{vol}_n(K) + \lambda\text{vol}_n(L).$$

The L_p Brunn-Minkowski inequality, $p \geq 1$ for convex bodies K and L containing the origin establishes

$$\text{vol}_n((1 - \lambda)K + \lambda L)^{p/n} \geq (1 - \lambda)\text{vol}_n(K)^{p/n} + \lambda\text{vol}_n(L)^{p/n}.$$

As in the classical case, we will argue that some refinements are indeed possible. However, we will provide a counterexample to the analogue *linearization* of the Brunn-Minkowski inequality in the case $p > 1$, i.e., there are convex bodies containing the origin, K_0 and L_0 , which share a common projection onto a hyperplane, satisfying

$$\text{vol}_n((1 - \lambda)K_0 + \lambda L_0)^p \geq (1 - \lambda)\text{vol}_n(K_0)^p + \lambda\text{vol}_n(L_0)^p.$$

In view of the latter, we will discuss alternative improvement possibilities for the L_p -Brunn-Minkowski inequality when the convex bodies share a projection, as well as related aspects of that.

This is about joint work with A. Colesanti, N. Lombardi, J. Yepes Nicolás.

Una versión funcional general de la desigualdad de Grünbaum

David Alonso-Gutiérrez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

alonsod@unizar.es

La desigualdad de Grünbaum afirma que, dado un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$, cualquier hiperplano H que pase por el centroide de K divide a K en dos partes de volumen mayor o igual que $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ veces el volumen de K .

Esta desigualdad se obtiene, una vez fijada una dirección $u \in S^{n-1}$, la esfera Euclídea en $\mathbb{R}^n$, considerando la función cóncava en su soporte $h(t) = |K \cap (tu + u^\perp)|^{\frac{1}{n-1}}$, y obteniendo una cota inferior para la cantidad

$$\frac{\int_{g_{n-1}}^{\infty} h(t)^{n-1} dt}{\int_{\mathbb{R}} h(t)^{n-1} dt},$$

donde g_{n-1} es la componente del centroide en la dirección u , dada por $g_{n-1} = \frac{\int_{\mathbb{R}} th(t)^{n-1} dt}{\int_{\mathbb{R}} h(t)^{n-1} dt}$.

En esta charla proporcionaremos, dada una función h cóncava en su soporte y dos parámetros $\alpha, \beta > 0$, cotas inferiores dependientes de α y β para

$$\frac{\int_{g_\alpha}^{\infty} h(t)^\beta dt}{\int_{\mathbb{R}} h(t)^\beta dt},$$

donde $g_\alpha = \frac{\int_{\mathbb{R}} th(t)^\alpha dt}{\int_{\mathbb{R}} h(t)^\alpha dt}$. La desigualdad obtenida permitirá recuperar, como casos particulares, algunas desigualdades conocidas en geometría convexa.

Este es un trabajo conjunto con F. Marín Sola, J. Marín Goñi y J. Yepes Nicolás.

Sobre la desigualdad de Zhang para funciones log-cóncavas

Julia Sánchez-Loscertales

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

julia.sanchez@unizar.es

La desigualdad de Zhang afirma que entre todos los cuerpos convexos $K \subseteq \mathbb{R}^n$, la cantidad invariante afín $|K|^{n-1}|\Pi^*K|$, donde Π^*K es el cuerpo de proyección polar de K y $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue, se minimiza cuando K es un símplex. Esta desigualdad proporciona una desigualdad inversa a la desigualdad de proyección de Petty, que afirma que dicha cantidad se maximiza cuando K es un elipsoide y proporciona una desigualdad más fuerte que la desigualdad isoperimétrica.

En 1998, Gardner y Zhang proporcionaron una nueva demostración de la desigualdad de Zhang, haciendo uso de una extensión de la desigualdad de Berwald, que proporciona una desigualdad de Hölder inversa para funciones cóncavas, para parámetros mayores que -1 . De esta manera obtuvieron una relación de contenido entre el cuerpo de Ball de parámetro n de la función covariograma de un cuerpo convexo y su cuerpo de proyección polar que implica la desigualdad de Zhang.

En 2020, Alonso-Gutiérrez, Bernués y González Merino demostraron una versión funcional de la desigualdad de Zhang para funciones log-cóncavas, obteniéndose posteriormente una demostración de contenido análoga a la de Gardner y Zhang en el caso log-cóncavo mediante la extensión de una desigualdad de Berwald para funciones log-cóncavas a exponentes mayores que -1 . Por otra parte, Alonso-Gutiérrez, Lucas y Martín Goñi han proporcionado recientemente una nueva demostración de la desigualdad de Zhang basada en el uso de la desigualdad de Berwald únicamente para parámetros positivos. Dicha demostración ha sido adaptada para obtener una versión, para la medida discreta dada por el enumerador de puntos del retículo entero, de la relación de contenido demostrada por Gardner y Zhang.

En esta charla veremos que también se puede obtener una demostración de la relación de contenido proporcionada por Gardner y Zhang, en el caso log-cóncavo, utilizando la desigualdad de Berwald para funciones log-cóncavas únicamente con parámetros positivos. Dicha técnica tiene como objetivo adaptarse al caso discreto en el contexto funcional.

Bridging volume and lattice enumeration via mixed isoperimetric inequalities

Eduardo Lucas Marín

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

eduardo.lucas@um.es

In the classical isoperimetric problem measurable sets of fixed volume minimizing surface area exist and are, in fact, necessarily Euclidean balls. In discrete settings, however, both the notion of boundary and the appropriate variational framework need to be reconsidered. Recent analogues have been obtained for both the cardinality and the lattice point enumerator, and in both cases, a fruitful approach has been to study the behaviour under cubical expansion of the sets.

With the intent of obtaining a mixed analogue, for bounded sets of prescribed Euclidean volume, we investigate minimizers of the lattice point enumerator under cubical enlargements. Using a suitable tessellation of space and discrete isoperimetric inequalities, we identify minimizers for several regimes of the enlargement parameter. We also propose a conjectural description of the minimizers in the general case.

Finally we show that, unlike in the pure continuous or discrete settings, no set can minimize the functional simultaneously for all enlargement parameters, revealing an inherent obstruction to global optimality in this mixed discrete–continuous isoperimetric problem.

Extremalidad y casos degenerados entre algunos funcionales geométricos

Bernardo González

Departamento de Ingeniería y Tecnología de Computadores, Universidad de Murcia

bgmerino@um.es

En 1961 Santaló demostró una desigualdad entre el inradio, circunradio y diámetro de un cuerpo convexo en el plano euclídeo. Además, observó que junto a las demás desigualdades clásicas, estos formaban un sistema completo de desigualdades para dichos funcionales.

En esta charla, voy a mostrar la estructura general de las desigualdades que podemos encontrar entre dichos funcionales cuando los consideramos en un espacio de Banach n -dimensional. Veremos que, esencialmente, existen cinco comportamientos bastante diferenciados entre sí a tener en cuenta. Así mismo, estudiaremos familias típicas extremales para cada comportamiento y cuándo estos comportamientos degeneran a un único punto.

Este es un trabajo junto a René Brandenberg y Mia Runge.

Planar radial mean bodies are convex

Julián Haddad

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla

jhaddad@us.es

The radial mean body of parameter $p > -1$ of a convex body $K \subseteq \mathbb{R}^n$ is a radial set $R_p K$ that can be defined as the Ball body of the covariogram function of K , of parameter p .

They were introduced by Gardner and Zhang in 1998, where they proved that $R_p K$ is convex for $p \geq 0$, and conjectured that they are still convex for $p \in (-1, 0)$.

We prove that if $K \subseteq \mathbb{R}^2$ is a convex body in the plane, then $R_p K$ is convex for every $p \in (-1, 0)$.

Lattice zonotopes and the lonely-runner conjecture

Francisco Santos

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria

`francisco.santos@unican.es`

The lonely runner conjecture (LRC) is the following statement formulated by Jörg Wills in 1968: if n “runners” move along a circle of length one, all starting at the origin, each with its own (constant) velocity, then there is a time at which they are all at distance at least $1/(n+1)$ from the origin.

In its shifted version (sLRC) the runners are allowed to start each at a different position and the velocities are assumed distinct (or else giving all runners the same velocity produces an easy counter-example). The conjecture has been approached from different perspectives, and is proved until $n = 6$ in the original version (Barajas and Serra 2008) and $n = 3$ in the shifted version (Cslovjecsek et al. 2022). The latter is based in a reformulation of LRC and sLRC as questions about the covering radii of certain zonotopes, a connection developed by Malikiosis and Schymura (2017).

In this talk I will review the conjecture and its relation to zonotopes and covering radii, and will show that, both in the original and the shifted versions, if the conjecture holds for integer velocities adding up to at most n^{2n} then it holds for arbitrary velocities. This improves a recent result of Terence Tao, who proved the same with a bound of n^{Cn^2} instead. We then use this bound to computationally prove the shifted version of the conjecture in the first open case, $n = 4$.

The first part is joint with Malikiosis and Shymura, and the second part with Alcántara and Criado.

Unique continuation: from discrete to continuous

Luz Roncal

Basque Center for Applied Mathematics

lroncal@bcamath.org

Discrete and continuous elliptic operators often exhibit different unique continuation properties: uniqueness features which hold in the continuous setting stop being true in discrete scenarios: motivating examples which show failure of weak unique continuation are provided in the literature for discrete harmonic functions and for discrete stationary Schrödinger equations.

We will give an overview of recent results on unique continuation properties for solutions of discrete equations on a lattice $(h\mathbb{Z})^d$. By discussing quantitative forms of unique continuation, we will illustrate that these properties can be recovered if small correction terms (in the lattice size) are added. We will be interested in both local and nonlocal models.

Based on joint works with Aingeru Fernández-Bertolin, Angkana Rüland, and Diana Stan.

Integral geometry in pseudo-riemannian spaces

Gil Solanes

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona

gil.solanes@uab.cat

The Lipschitz-Killing invariants, discovered by Weyl in his tube formula, are among the most fundamental riemannian invariants. Remarkably, they can be extended to several classes of singular subspaces of a riemannian manifold. Under this form, they belong to a type of functionals called valuations, and they constitute a natural generalization of the intrinsic volumes from convex geometry. I will present a joint project with Andreas Bernig and Dmitry Faifman where we extend the Lipschitz-Killing valuations to the pseudo-riemannian setting. The main difficulty is the appearance of diverging integrals related to the existence of light directions. Our approach, based on distributions, has led in particular to a Gauss-Bonnet formula for metrics of changing signature, and to Crofton formulas in pseudo-riemannian space-forms.

Sesión especial 17

Geometría Diferencial y Aplicaciones

Equipo organizador:

- *Cristina Draper Fontanals* (Universidad de Málaga)
- *Daniel de la Fuente Benito* (Universidad de Oviedo)
- *Enrique Pendás Recondo* (Universidad de Oviedo)
- *Jose Torrente Teruel* (Universidad de Córdoba)

Descripción

En esta sesión abarcamos todos los ámbitos de la geometría diferencial: riemanniana, lorentziana, de Finsler, de Kähler, compleja, subriemanniana, etc. Además de tratar asuntos puramente teóricos, prestamos especial interés por sus aplicaciones a otras ramas de la Ciencia, como puede ser la teoría de la Relatividad, la mecánica newtoniana, las películas de jabón o su relación con los procesos estocásticos, entre otras.

Palabras clave: Geometría diferencial; Geometría lorentziana; Relatividad matemática; Geometría riemanniana; Geometría subriemanniana.

Programa

JUEVES, 22 de enero

- | | |
|---------------|---|
| 11:00 – 11:30 | Jorge Alcázar González (Universidad de Córdoba)
<i>Simetrías en variedades de Kaehler e hipersuperficies complejas holomórficamente pseudo simétricas en espacios forma complejos.</i> |
| 11:30 – 12:00 | Marcos Paulo Tassi (Universidad de Granada)
<i>Superficies de Weingarten elípticas en $\mathbb{R}^3$ con borde plano convexo.</i> |
| 12:00 – 12:30 | Erasmus Caponio (Politecnico di Bari)
<i>On a generalization of the Matsumoto's slope of a mountain metric.</i> |
| 12:30 – 13:00 | Jonatan Herrera Fernández (Universidad de Córdoba)
<i>La conjetura de Bartnik en baja regularidad.</i> |
| 15:30 – 16:00 | Erik Sarrión Pedralva (Universidad Rey Juan Carlos)
<i>Moment spectrum comparisons in Riemannian manifolds.</i> |
| 16:00 – 16:30 | José S. Santiago (Universidad de Jaén)
<i>On the characterization of immersions via fundamental data.</i> |
| 16:30 – 17:00 | Diego A. Marín (Universidad de Granada)
<i>Geometry of f-extremal domains in the 2-sphere.</i> |
| 17:00 – 17:30 | Martín de la Rosa (Universidad de Córdoba)
<i>Trayectorias de partículas relativistas dependientes de las curvaturas de Frenet en espaciotiempos Brinkmann.</i> |
| 18:00 – 18:30 | Tjaša Vrhovnik (Universidad de Granada)
<i>Every nonflat conformal minimal surface is homotopic to a proper one.</i> |
| 18:30 – 19:00 | Didier A. Solis Gamboa (Universidad de Yucatán)
<i>Subvariedades tipo espacio de codimensión dos inmersas en conos nulos.</i> |

Simetrías en variedades de Kaehler e hipersuperficies complejas holomórficamente pseudo simétricas en espacios forma complejos

Jorge Alcázar

Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba

f82algoj@uco.es

Las condiciones de simetría de hipersuperficies complejas de variedades de Kaehler con curvatura seccional holomorfa constante han sido ampliamente estudiadas por diversos autores. Es de destacar, en primer lugar, el conocido trabajo de Smyth en el que clasifica las hipersuperficies complejas Einstein de un espacio forma complejo y prueba que tales hipersuperficies son localmente simétricas. Posteriormente, de los trabajos de Ryan y Abe se deduce una clasificación completa de las hipersuperficies complejas semisimétricas de un espacio forma complejo, y los trabajos de Romero estudian las hipersuperficies de complejas Einstein en espacio forma complejos indefinidos. Dando un paso más, en esta charla consideramos hipersuperficies complejas holomorfas pseudo simétricas en un espacio forma complejo y obtenemos una caracterización de estas en función de su segunda forma fundamental, dando ejemplos concretos de dichas hipersuperficies, y abordamos asimismo dicho estudio en el contexto de espacio forma complejos indefinidos.

Los resultados expuestos en esta charla están parcialmente basados en [1] y serán publicados próximamente.

Referencias

- [1] A. Albuja, J. Alcázar, M. Caballero (2023). On the symmetries of the Kaehler manifolds. *Mediterr. J. Math.*, 20, 197.

Superficies de Weingarten elípticas en $\mathbb{R}^3$ con borde plano convexo

Marcos Paulo Tassi

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

mptassi@ugr.es

Una superficie Σ inmersa en $\mathbb{R}^3$ es una superficie de Weingarten elíptica si sus curvaturas principales k_1 y k_2 satisfacen una ecuación del tipo $W(k_1, k_2) = 0$, para alguna función $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\frac{\partial W}{\partial k_1} \frac{\partial W}{\partial k_2} > 0$ en $W^{-1}(\{0\})$. Ejemplos conocidos de superficies de Weingarten elípticas incluyen superficies mínimas, de curvatura media constante y de curvatura gaussiana positiva constante.

En 1996, A. Ros y H. Rosenberg demostraron que para una curva estrictamente convexa $\Gamma \subset \{z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, existe una constante h que depende únicamente de la curva Γ tal que cualquier superficie compacta embebida en $\mathbb{R}_+^3 := \{z \geq 0\}$ con curvatura media constante $H \leq h$ debe ser topológicamente un disco cerrado.

En esta charla, presentaremos una generalización del Teorema de Ros-Rosenberg para superficies de Weingarten elípticas en $\mathbb{R}^3$, discutiendo su demostración, que se basa en algunas técnicas de Análisis Geométrico como el Principio del Máximo y el Método de Reflexión de Alexandrov, así como en la reciente clasificación de superficies de Weingarten elípticas de revolución obtenida por I. Fernandez y P. Mira.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con B. Nelli y G. Pipoli.

On a generalization of the Matsumoto's slope of a mountain metric

Erasmus Caponio

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management, Politecnico di Bari

erasmo.caponio@poliba.it

Matsumoto's metric describing the motion of a walker on a slope of mountain under the action of gravity can be generalized to the case when a component of the gravity transversal to the motion is considered (also with tractions coefficients) as shown in some recent works. This generalization is obtained by a wind Finslerian modification of the Matsumoto's metric. We show in this talk that a Finsler metric in this general setting can be obtained by using the same idea in Matsumoto's construction.

La conjetura de Bartnik en baja regularidad

Jonatan Herrera

Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba

jherrera@uco.es

Desde el artículo inicial de Kunzinger y Sämann sobre espacios de longitud lorentzianos [1], el interés por desarrollar una aproximación sintética a la geometría de Lorentz no ha hecho más que crecer. Esto queda patente por la cantidad de teoría que se ha desarrollado en este nuevo ambiente, incluyendo un análisis de la escalera causal [2] o versiones del teorema de Bonnet [3] y el teorema del splitting de Topogonov [4], entre otros.

En esta charla mi objetivo es mostrar como es posible dar una prueba sintética de la conjetura de Bartnik bajo condiciones adicionales de curvatura. Para ello utilizaremos que, en el contexto de espacios de longitud lorentzianos, es posible definir una noción adecuada de curvatura acotada inferior/superiormente, la cual será suficiente para nuestro objetivo.

Referencias

- [1] M. Kunzinger, C. Sämann (2018). Lorentzian length spaces. *Ann. Global Anal. Geom.* 54 399–447.
- [2] L. Ake Hau, A. Cabrera Pacheco, D.A. Solís (2020). On the causal hierarchy of Lorentzian length spaces. *Class. Quantum Grav.* 37(21).
- [3] T. Beran, L. Napper, F. Rott (2025). Alexandrov’s Patchwork and the Bonnet-Myers Theorem for Lorentzian length spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 378, 2713–2743.
- [4] T. Beran T, A. Ohanyan, F. Rott, D.A. Soli (2023). The splitting theorem for globally hyperbolic Lorentzian length spaces with non-negative timelike curvature. *Lett. Math. Phys.* 113(2), 48.
- [5] J.L. Flores, J. Herrera, D.A. Solís (2024). arXiv:2412.08967.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con el Prof. José Luis Flores (U. de Málaga) y el Prof. Didier A. Solís (U. Autónoma de Yucatán) [5].

Moment spectrum comparisons in Riemannian manifolds

Erik Sarrión Pedralva, Vicente Palmer

Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de los Materiales y Tecnología Electrónica, Universidad Rey Juan Carlos

erik.sarrion@urjc.es

We will show some explicit upper and lower bounds for the averaged moment spectrum, and the torsional rigidity of a geodesic ball in a Riemannian manifold which satisfies that the mean curvatures of the geodesic spheres included in it, (up to its boundary), are controlled by the radial mean curvature of the geodesic spheres with same radius centered at the center of a rotationally symmetric model space. As a consequence, we prove that equality between the first eigenvalues characterizes the moment spectrum and vice-versa.

References

- [1] Vicente Palmer, Erik Sarrión-Pedralva (2024). First Dirichlet Eigenvalue and Exit Time Moment Spectra Comparisons. *Potential Analysis*, vol. 60(1), 489-531.

On the characterization of immersions via fundamental data

José S. Santiago

Departamento Matemática Aplicada, Universidad de Jaén

jssantia@ujaen.es

In this talk, we will explore the characterization of immersions in certain spaces via certain analytical objects. We will show how this approach can be adapted to address different types of geometric problems, illustrating its versatility through several examples: the characterization of constant mean curvature (CMC) surfaces in terms of holomorphic data, the characterization of surfaces in terms of certain vector fields and the characterization of surfaces sharing the same Gauss map.

Geometry of f -extremal domains in the 2-sphere

Diego A. Marín

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

damarin@ugr.es

Given a riemannian manifold (M, g) and a Lipschitz function $f \in C(\mathbb{R}^2)$, we say that a domain $\Omega \subset M$ with C^2 -boundary is an f -extremal domain if it supports a solution to the overdetermined elliptic problem (OEP)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u + f(u)|\nabla u| = 0 & \text{in } \Omega, \\ u > 0, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \\ \langle \nabla u, \eta \rangle = \alpha_i, & \text{on } \Gamma_i \subset \partial\Omega, \end{array} \right.$$

where η is the outer conormal to $\partial\Omega$ and $\alpha_i \leq 0$ is a constant on each connected component $\Gamma_i \subset \partial\Omega$.

It is a well known fact in the literature that the theory of the existence and rigidity of f -extremal domains is closely linked to the theory of constant mean curvature surfaces (CMC) in M .

In this talk, we will explore this connection for f -extremal domains in $\mathbb{S}^2$. In particular, using techniques from the theory of CMC-surfaces, we will demonstrate that, under certain conditions on the function f and the topology of the domain Ω , an f -extremal domain in $\mathbb{S}^2$ must exhibit significant symmetry. We will also demonstrate how these techniques can be applied to study capillary CMC surfaces in the unit ball, a topic that has received a great deal of attention in recent years.

This talk is based on joint work with my supervisor, Jose M. Espinar.

Trayectorias de partículas relativistas dependientes de las curvaturas de Frenet en espaciotiempos Brinkmann

Martín de la Rosa

Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba

f42rodin@uco.es

En esta charla se presentarán resultados preliminares acerca de la dinámica de modelos de partículas relativistas en espaciotiempos Brinkmann de especial relevancia física [1]. Los modelos considerados son extensiones del modelo de la partícula relativista libre que contienen términos que dependen linealmente de las curvaturas de Frenet de la trayectoria, siguiendo la idea popularizada por M.S. Plyushchay [2]. Matemáticamente, se trata de estudiar el problema variacional asociado a funcionales dados por la integral sobre la curva de una combinación lineal de las curvaturas de Frenet, posiblemente junto con un término constante. Se prestará especial atención a las trayectorias que estén contenidas en un frente de onda. Asimismo, se establecerá una comparación con las trayectorias conocidas para esta misma clase de funcionales en espaciotiempos Robertson-Walker generalizados [3].

Referencias

- [1] J. A. Candela, J. L. Flores y M. Sánchez (2003). On general plane fronted waves. *Geodesics. General Relativity and Gravitation* 35, 631–649.
- [2] M. S. Plyushchay (1989). Massive relativistic point particle with rigidity. *International Journal of Modern Physics A*, 4, 15, 3851–3865.
- [3] J. Herrera, M. de la Rosa y R. M. Rubio. (2024). On the geometry and dynamics of relativistic particles in generalized Robertson–Walker spacetimes. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. SIAM J. Sci. Comput.*, 2450048.

Every nonflat conformal minimal surface is homotopic to a proper one

Tjaša Vrhovnik

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

vrhovnik@ugr.es

Given an open Riemann surface M , we prove that every nonflat conformal minimal immersion $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) is homotopic through nonflat conformal minimal immersions $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ to a proper one. If $n \geq 5$, it may be chosen in addition injective, hence a proper conformal minimal embedding. Prescribing its flux, as a consequence, every nonflat conformal minimal immersion $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ is homotopic to the real part of a proper holomorphic null embedding $M \rightarrow \mathbb{C}^n$. We also obtain a result for a more general family of holomorphic immersions from an open Riemann surface into $\mathbb{C}^n$ directed by Oka cones in $\mathbb{C}^n$.

Subvariedades tipo espacio de codimensión dos inmersas en conos nulos

Didier A. Solís Gamboa

Departamento de Matemáticas, Universidad de Yucatán

didier.solis@correo.uady.mx

En el contexto de la relatividad general, las secciones de horizontes de eventos son objetos clave para la formulación de algunos de sus resultados más icónicos, como los teoremas de singularidad o el teorema del área. Estos objetos -subvariedades tipo espacio de codimensión 2- que se encajan en hipersuperficies luminosas han sido estudiadas desde los principios de la relatividad, y más recientemente desde una perspectiva conforme. En esta charla abordaremos una serie de resultados en esta dirección en el contexto de una clase general de hipersuperficies luminosas, llamadas conos nulos, y estudiamos de manera particular diversos ejemplos que incluyen el cono de luz y cilindros luminosos en el espacio de Minkowski, así como superficies totalmente umbílicas en el espacio de De Sitter.

Agradecimientos. Trabajo conjunto con L. Alías, J. Meléndez y M. Navarro.

Sesión especial 18

Groups, Rings and Representations

Equipo organizador:

- *J. Miquel Martínez* (Universidad de Valencia)
- *Noelia Rizo* (Universidad de Valencia)
- *Lucia Sanus* (Universitat de València)

Description

This session brings together recent advances in the study of finite groups, with a particular focus on character theory, conjugacy classes, and the structure of group rings. The talks cover a wide range of topics, including fields of character values, vanishing elements, class sizes, local-global conjectures, coprime actions, subgroup generation properties, etc.

The session highlights both classical problems and new directions, combining character-theoretic and ring-theoretic methods, illustrating the rich interaction between group structure and representation theory and reflecting the diversity of current research in the area. It aims to foster exchange between researchers working from different perspectives on closely related questions.

Keywords: Finite Groups; Characters; Fields of Values; Group Rings; Conjugacy Classes.

Programa

LUNES, 19 de enero

- 15:30 – 16:00 Antonio Beltrán (Universitat Jaume I)
Cosets of normal subgroups contained in conjugacy classes
- 16:00 – 16:30 Carolina Vallejo (Università degli Studi di Firenze)
Coprime actions and blocks
- 16:30 – 17:00 Juan Martínez Madrid (Universidad de Valencia)
Commuting probability of finite groups
- 17:00 – 17:30 Iris Gilabert (Universitat Politècnica de València)
Minimal invariant character degrees of normal subgroups

MARTES, 20 de enero

- 11:00 – 11:30 Ángel del Río (Universidad de Murcia)
Quadratic groups
- 11:30 – 12:00 Sara C. Debón (Universidad de Murcia)
Groups with small fields of values
- 12:00 – 12:30 Gabriel A. L. Souza (Universidad de Valencia)
On groups whose character table is almost rational
- 15:30 – 16:00 María Dolores Pérez Ramos (Universitat de València)
Two generated subgroups and radical elements
- 16:00 – 16:30 Leo Margolis (Universidad Autónoma de Madrid)
The Prime Graph Question for units in integral group rings
- 16:30 – 17:00 Rocío Velasco Olalla (CUNEF Universidad)
Some results on Kimmerle's problem
- 17:00 – 17:30 Joan Tent (Universidad de Valencia)
Kernels of odd-degree rational irreducible characters
- 18:00 – 18:30 Víctor Sotomayor (Universidad de Granada)
Finite groups in which almost all conjugacy class sizes are prime numbers
- 18:30 – 19:00 Lucia Sanus (Universitat de València)
On vanishing elements

Cosets of normal subgroups contained in conjugacy classes

Antonio Beltrán

IMAC, Departamento de Matemáticas, Universitat Jaume I

abeltran@uji.es

Let G be a finite group, N a normal subgroup of G , and x an element of G . In 2016, R. Guralnick and G. Navarro proved that if all the elements in the coset Nx are conjugate in G , which is simply equivalent to saying $Nx \subseteq K$ where K is the conjugacy class of x , then N is solvable. We proved that the same conclusion holds when all the elements in Nx lie in the union of a conjugacy class and its inverse class.

However, our investigation shows that N does not necessarily have to be solvable when the coset Nx is contained within the union of any two conjugacy classes of G , say K and D . In this case, the structure of such a non-solvable N is significantly restricted. Using character theory, we establish conditions for a coset Nx to be contained in $K \cup D$ and provide examples that illustrate the limits of our findings. For instance, if K and D have different cardinality then N is solvable.

Groups with small fields of values

Sara C. Debón

Departamento Matemáticas, Universidad de Murcia

sara.ceblland@um.es

Several mathematicians have studied the relation between the structural properties of solvable groups and their character values. One of the first results in this direction was made by Gow [1]. He proved that the primes dividing the order of a finite solvable rational group are contained in $\{2, 3, 5\}$. Years later, Hegedüs [2] showed that the Sylow 5-subgroup of a finite solvable rational group is normal and elementary abelian. Naturally, those results have influenced many papers on the topic of groups having relatively small fields of values, such as the quadratic or cut groups, which can be considered as direct generalizations of the rational groups.

In this talk I will discuss some recent advances on the study of these groups. This is joint work with J. Tent.

References

- [1] R. Gow, *Groups whose characters are rational-valued*, J. Algebra 40 (1976), 280–299.
- [2] P. Hegedüs, *Structure of rational solvable groups*, Proc. London Math. Soc. (3) 90 (2005), 439–471.

Acknowledgments. Partially supported by Agencia Estatal de Investigación of Spain, project PID2020-113206GB-I00 and by Fundación Séneca (22004/PI/22)

Quadratic groups

Ángel del Río

Departamento Matemáticas, Universidad de Murcia

adelrio@um.es

We will present some recent developments on finite groups whose ordinary irreducible characters takes values on quadratic extensions of the rationals. This property is connected to the following invariants of a group G : The rationality of G is the following subset of the group $\mathcal{U}_n$ of units of $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\mathcal{R}_G = \{r \in \mathcal{U}_n : g \text{ is conjugate to } g^r \text{ in } G \text{ for every } g \in G\}$$

and the semi-rationality of G is

$$\mathcal{S}_G = \{r \in \mathcal{U}_n : \text{for every } g \in G, \text{ every generator of } \langle g \rangle \text{ is conjugate to } g \text{ or } g^r\}.$$

The field of values of G is

$$\mathbb{Q}(G) = \mathbb{Q}(\chi(g) : g \in G, \chi \in \text{Irr}(G)).$$

The Galois correspondence connects the rationality of G with its field of values and the semi-rationality is connected with the following families of subfields of $\mathbb{Q}(G)$:

$$\{\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\chi(g) : g \in G) : \chi \in \text{Irr}(G)\}, \quad \{\mathbb{Q}(g) = \mathbb{Q}(\chi(g) : \chi \in \text{Irr}(G)) : g \in G\}.$$

Acknowledgments. Partially supported by Agencia Estatal de Investigación of Spain, project PID2020-113206GB-I00 and by Fundación Séneca (22004/PI/22)

Minimal invariant character degrees of normal subgroups

Iris Gilabert

Institut Universitari de Matemàtica Pura i Aplicada, Universitat Politècnica de València,

igilman@posgrado.upv.es

Let G be a finite group. Recent research shows how the degrees of the minimal G -invariant characters of a normal subgroup N of G exert some influence over its structure, in a way similar to how ordinary irreducible characters influence the structure of a group. For example, if p is a prime dividing the degree of every non linear minimal G -invariant character of N , then N has a normal p -complement, extending the well-known theorem of Thompson when $N = G$. These characters of N are defined as the sum of irreducible characters of N that belong to the same orbit under the action of G on the set of irreducible characters of N , and they form a basis for the $\mathbb{C}$ -vector space of G -invariant class functions of N . In this talk, we present some progress obtained in this current line of research in finite group theory. Joint work with M. J. Felipe and L. Sanus.

Acknowledgments. Partially supported by CIACIF/2023/389 funded the Generalitat Valenciana and the Spanish Ministerio de Ciencia e Innovación (PID2022-137612NB-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and 'ERDF A way of making Europe')

The Prime Graph Question for units in integral group rings

Leo Margolis

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

leo.margolis@uam.es

The unit group of the integral group ring $\mathbb{Z}G$ of a finite group G is a long studied object, but nevertheless many fundamental questions remain open. Concerning the elements of finite order, one could wonder if the existence of a unit of augmentation 1 which has order n implies that also G contains an element of order n . While this is known since the 1960's in case n is a prime power, it remains open even for the case when n is the product of two different primes and is known in this case as the *Prime Graph Question*. While this is a weak variation of many other open questions concerning the unit group of $\mathbb{Z}G$, it has the advantage of admitting a reduction to finite simple groups - thus giving hope a positive solution might be possible.

I will explain a method developed to study the question based on character theory and modular representation theory. It is especially powerful, when a Sylow p -subgroup of G is cyclic, where p is a prime dividing n , though seems useless when p equals 2. Recently we showed how it still can be applied in this situation by considering reductions modulo 4 instead of modulo 2, in some situations when the Sylow 2-subgroup is a Klein four group or dihedral of order 8.

This is joint work with Florian Eisele.

Commuting probability of finite groups

Juan Martínez Madrid

Departamento de Matemáticas, Universidad de Valencia

`juan.martinez-madrid@uv.es`

A classical result of W. H. Gustafson asserts that if the probability that two randomly chosen elements of a finite group G commute exceeds $5/8$, then G is abelian. In this talk we present some results which generalize Gustafson's Theorem.

Acknowledgments. Partially supported by Ministerio de Ciencia e Innovación (PID2022-137612NB-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and 'ERDF A way of making Europe') and CIACIF/2021/228 funded by Generalitat Valenciana.

Two generated subgroups and radical elements

María Dolores Pérez-Ramos

Departament de Matemàtiques, Universitat de València

Dolores.Perez@uv.es

Roughly speaking, the question how properties of certain subgroups generated by few elements influence the structure of a group is in the core of classical and wide areas of the theory of groups. For instance, the study of (finitely generated) groups all of whose cyclic subgroups are finite gave rise to the classical Burnside problem. Also Thompson's theorem about the solubility of a finite group whose two-generated subgroups are soluble is a remarkable example of how investigation of global properties of groups relies on investigation of their two-generated subgroups. The so-called *one-and-a-half generation theorem* by Guralnick and Kantor plays an important role in this research. It states in particular that no finite simple group has an element that generates proper subgroups with every other element. In the context of products of groups, the study of finite $\mathcal{C}$ -connected products for a class of groups $\mathcal{C}$ (i.e. finite factorized groups $G = AB$ such that $\langle a, b \rangle \in \mathcal{C}$ for all $a \in A \leq G$ and all $b \in B \leq G$) provides a more general setting for local-global questions related to two-generated subgroups, by considering the special case when $G = AB = A = B$. Among other relevant results, we highlight an extension of Thompson's theorem from this perspective, obtained in previous research. We report now on new progress in this direction, which involve particularly the class of π -closed subgroups, for a set of primes π .

Collaboration with P. Hauck (U. Tübingen, Germany), L. Kazarin (U. Yaroslavl, Russia), and A. Martínez-Pastor (U. Politècnica de València, Spain).

On vanishing elements

Lucia Sanus

Departament de Matemàtiques, Universitat de València

Lucia.Sanus@uv.es

Let G be a finite group, and let $\text{Irr}(G)$ denote the set of the irreducible complex characters of G . An element $g \in G$ is called a *vanishing element* of G if there exists $\chi \in \text{Irr}(G)$ such that $\chi(g) = 0$ (i.e., g is a zero of χ) and, in this case, the conjugacy class g^G of g in G is called a *vanishing conjugacy class*. In this paper we consider several problems concerning vanishing elements and vanishing conjugacy classes; in particular, we consider the problem of determining the least number of conjugacy classes of a finite group G such that every non-linear $\chi \in \text{Irr}(G)$ vanishes on one of them. We also consider the related problem of determining the minimum number of non-linear irreducible characters of a group such that two of them have a common zero.

Joint work with M.L. Lewis, L. Morotti, E. Pacifici and H.P. Tong-Viet.

Acknowledgments. Partially supported by Ministerio de Ciencia e Innovación (PID2022-137612NB-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and ‘ERDF A way of making Europe’).

Finite groups in which almost all conjugacy class sizes are prime numbers

Víctor Sotomayor

Departamento de Álgebra, Universidad de Granada

vsotomayor@ugr.es

Due to reasons that are not fully understood, the conjugacy class sizes of a group share several analogies with its irreducible character degrees. Sometimes these analogies lead to interesting problems. The aim of this talk is to survey some results regarding finite groups that possess few class sizes or character degrees that are composite numbers. In particular, we will show recent progress in the framework of class sizes. This is joint work with C. Monetta (Università di Salerno).

On groups whose character table is almost rational

Gabriel A. L. Souza

Departamento de Matemáticas, Universidad de Valencia

gabriel.area@uv.es

There are many known results on groups with few rational conjugacy classes. In this talk, we will look at groups on the opposite extreme, where most conjugacy classes are rational. Among other results, we study the structure of groups with at most 5 irrational conjugacy classes. We also relate the number of irrational conjugacy classes to that of irrational irreducible characters.

Acknowledgments. The author is supported by Ministerio de Ciencia e Innovación (grant PREP2022-000021 tied to the project PID2022-137612NB-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and “ERDF A way of making Europe”).

Kernels of odd-degree rational irreducible characters

Joan Tent

Departamento de Matemáticas, Universidad de Valencia

joan.tent@uv.es

Rational-valued irreducible characters of odd degree, and their analogues for odd primes, are known to reflect deep properties of the structure of a finite group and have therefore been a topic of interest in character theory over the years. In this talk, we present a generalization of a result conjectured by R. Gow and a refined version of J. Thompson's theorem on character degrees obtained by G. Navarro and P. Tiep, by showing that a finite group possesses a rational, odd-degree irreducible character with 2-nilpotent kernel. Our methods are general enough to apply to any prime, and some additional results which might be of independent interest are required for the odd prime case. This is joint work with A. Moretó.

Acknowledgments. Partially supported by Ministerio de Ciencia e Innovación (PID2022-137612NB-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and 'ERDF A way of making Europe').

Coprime actions and blocks

Carolina Vallejo

Dipartimento di Matematica e Informatica Ulisse Dini, Università degli Studi Firenze

carolina.vallejorodriguez@unifi.it

In this talk, we introduce and study the problem of characterizing when an A -invariant block of a group G contains a unique A -invariant irreducible character, in the situation where the group A acts coprimely by automorphisms on G .

This is joint work with Z. Feng.

Some results on Kimmerle's problem

Rocío Velasco Olalla

Departamento de Matemáticas, CUNEF Universidad

rocio.velasco@cunef.edu

The Zassenhauss Conjecture on units in group rings asked if any unit of finite order in the integral group ring $\mathbb{Z}G$ of a finite group G is conjugate inside the rational group ring of G to an element of form $\pm g$ for some $g \in G$.

While this has been refuted in general, several versions remain open. In particular, Kimmerle asked if the conjugation can be realized in $\mathbb{Q}H$ for some group H containing G .

We will show some results on Kimmerle's problem (in the class of solvable groups).

Sesión especial 19

Loci of Riemann and Klein Surfaces and Related Topics

Equipo organizador:

- *Milagros Izquierdo* (Linköping University)
- *Sebastián Reyes Carocca* (Universidad de Chile)
- *Antonio F. Costa* (Universidad Nacional de Educación a Distancia)

Description

The special session will be devoted to Riemann and Klein surfaces, and Jacobian varieties and their moduli spaces, with special attention to group actions on surfaces and their Jacobian varieties, automorphisms of surfaces (real and complex), Grothendieck theory of dessins d'enfants (maps and hypermaps) and topological properties of moduli spaces of complex and real curves. The special session will have a computational/combinatorial flavour, with focus on group actions on Riemann surfaces, Klein surfaces and related structures such as abelian varieties or hyperbolic manifolds. The session will consider as well orbifolds in low dimension.

The study of Riemann surfaces with automorphisms constitutes an important meeting point for Group Theory, Geometry and Analysis, and there is considerable current activity in this field. For instance, several recent meetings of the AMS have had special sessions on these and closely related themes, as well as a number of conferences: BIRS, Banff (2017) Canada; the series *Geometry at the Frontier* (2018-2022); within *Congreso Iberoamericano de Geometría* since 2018.

Keywords: Compact and non-compact Riemann Surfaces; Klein surfaces; Teichmüller and moduli spaces; Fuchsian and NEC groups; Jacobian Varieties.

Programa

JUEVES, 22 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:30 | Sebastián Reyes Carocca (Universidad de Chile)
<i>$\mathbb{Z}_k^m$-actions of signature $(0; k, n+1, k)$</i> |
| 11:30 – 12:00 | Ewa Kozłowska-Walania (University of Gdansk, Poland)
<i>Extremal configurations of commuting symmetries</i> |
| 12:00 – 12:30 | Angel Carocca (Universidad de La Frontera, Temuco, Chile)
<i>Group Actions on Abelian Varieties</i> |
| 12:30 – 13:00 | Claudia Muñoz (Universidad Autónoma de Madrid)
<i>Uniformization of extremal hyperbolic surfaces with geodesic boundary and/or punctures</i> |
| 13:00 – 13:30 | José Javier Etayo (Universidad Complutense de Madrid)
<i>No hay ningún grupo de género real 72</i> |
| 15:30 – 16:00 | Antonio Breda (Universidad de Aveiro)
<i>On Singular Map-Spectra Groups</i> |
| 16:00 – 16:30 | Adrián Bacelo (Universidad Complutense de Madrid)
<i>Comparing the real genus and the symmetric crosscap number of a group</i> |
| 16:30 – 17:00 | Pietro Speziali (Universidade Estadual de Campinas)
<i>The hunt for compact Riemann Surfaces with a transitive action on Weierstrass points</i> |
| 18:00 – 18:30 | Rubí Rodríguez (Universidad de La Frontera, Temuco, Chile)
<i>Gluing Riemann surfaces and their Jacobians</i> |
| 18:30 – 19:00 | Raquel Díaz (Universidad Complutense de Madrid)
<i>Boundary of equisymmetric strata of Riemann surfaces with abelian automorphism groups</i> |
| 19:00 – 19:30 | Ewa Tyszkowska (University of Gdansk, Poland)
<i>Clifford bundles over Klein surfaces</i> |

VIERNES, 23 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:30 | Anita Rojas (Universidad de Chile)
<i>On Non-Normal Subvarieties of the Moduli Space of Riemann Surfaces</i> |
| 11:30 – 12:00 | Enrique Artal (Universidad de Zaragoza)
<i>Plane octic curves with $6\mathbb{E}_6$ singular points and non hyperelliptic Riemann surfaces of genus 3</i> |
| 12:00 – 12:30 | Ernesto Gironde (Universidad Autónoma de Madrid)
<i>The minima of the geodesic length function for uniform filling curves</i> |

$\mathbb{Z}_k^m$ -actions of signature $(0; k, n+1, k)$

Sebastián Reyes-Carocca

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile

sebastianreyes.c@uchile.cl

In this talk we consider $\mathbb{Z}_k^m$ -actions of signature $(0; k, n+1, k)$, namely, pairs (S, N) where S is a compact Riemann surface endowed with a group of automorphisms $N \cong \mathbb{Z}_k^m$ acting on S with signature $(0; k, n+1, k)$. We shall discuss some recent results concerning the topological classification of such actions, particularly in the case they admit extra automorphisms. This is a joint work with Rubén A. Hidalgo (Universidad de La Frontera, Chile).

Acknowledgments. Partially supported by Fondecyt ANID Grants 1220099 and 1230708.

Extremal configurations of commuting symmetries

Ewa Kozłowska-Walania

Gdansk University

ewakw6@gmail.com

We consider configurations of commuting symmetries that admit the maximal possible total number of ovals. We show all the possible topological symmetry types of underlying surfaces and provide their defining real equations. This is a joint work with Peter Turbek.

Group Actions on Abelian Varieties

Angel Carocca

Departamento de Matemática
Universidad de La Frontera

angel.carocca@ufroterra.cl

Let $\mathcal{A}$ be an abelian variety. It is known that there exists a bijection between the set of abelian subvarieties of $\mathcal{A}$ and the set of symmetric idempotents in $\text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{A})$. When considering a finite group G acting on an abelian variety $\mathcal{A}$, determining idempotent elements $f \in \mathbb{Q}[G]$, especially those associated with subgroups, and studying the geometric properties and the endomorphism ring of the subvariety $\text{Image}(f)$, have become central problems in this field of study. Let us consider subgroups $K \trianglelefteq H \leq G$ such that (K, H) forms a Shoda pair. Define

1.

$$\epsilon(K, H) = \begin{cases} p_K & \text{if } K = H \\ \prod_{M \in \mathcal{M}(H/K)} (p_K - p_M) & \text{if } K \neq H \end{cases}$$

where $\mathcal{M}(H/K)$ denotes the set of minimal normal subgroups of H containing K properly and

$$p_K = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} k.$$

2.

$$e(G, K, H) = \sum_{g \in T} \epsilon(K, H)^g$$

where T is a right transversal of $\mathbf{C}_G(\epsilon(K, H))$ in G .

In this communication, we present some results concerning the geometric description of $\text{Image}(\epsilon(K, H))$ and $\text{Image}(P_K - P_M)$, for each $M \in \mathcal{M}(H/K)$.

Acknowledgments. Partially supported by Fondecyt 1200608.

Uniformization of extremal hyperbolic surfaces with geodesic boundary and/or punctures

Claudia Muñoz, Ernesto Girondo

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

claudia.munnoz@uam.es

An important geometric feature of hyperbolic surfaces, ie. the topological surfaces whose universal covering space is the hyperbolic plane, is the largest radius of a metric disc properly embedded in a given surface, known as its *injectivity radius*. In 1996, C. Bavard [1] showed that the maximal injectivity radius of any compact orientable hyperbolic surface without boundary is sharply bounded above by a certain *extremal radius* that depends only on the topology of the surface. This upper bound was later generalized for non-orientable closed hyperbolic surfaces and, in the following years, several authors studied the closed hyperbolic surfaces that contain an embedded metric disc of that extremal radius, the so-called *extremal surfaces*, by using the uniformization of hyperbolic surfaces by NEC groups as in [4].

However, in the last decade, a different approach has been proposed by J. deBlois and K. Romanelli along the papers [2] and [3]. This new setting has been essential in determining the dependence of the extremal radius of general hyperbolic surfaces of finite type, which may have punctures and/or geodesic boundary, with respect to the underlying topology of the surface. In this talk, based on a recent joint work [5] with Ernesto Girondo, we translate all these results back into the language of the uniformization by NEC groups and we apply this different point of view for solving some interesting problems about non-closed extremal surfaces, such as counting the total number of extremal surfaces given their topological data or studying conditions on the existence of multiple extremal discs within a given surface.

References

- [1] C. Bavard (1996). Disques extrémaux et surfaces modulaire. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, Serie 6, Volume 5, no. 2, pp. 191-202.
- [2] J. DeBlois (2015). The centered dual and the maximal injectivity radius of hyperbolic surfaces. *Geometry & Topology*, vol. 19, 953–1014.
- [3] J. DeBlois, K. Romanelli (2021). The maximal injectivity radius of hyperbolic surfaces with geodesic boundary. *Geometriae Dedicata*, 210(1), 103-129.
- [4] E. Girondo, G. González-Díez (1999). On extremal discs inside compact hyperbolic surfaces. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, Volume 329, Issue 1, pages 57-60.
- [5] E. Girondo, C. Muñoz (2025). The NEC group uniformization of extremal hyperbolic surfaces with boundary and/or cusps. *Preprint*.

No hay ningún grupo de género real 72

José Javier Etayo, Ernesto Martínez, Pedro Rodríguez

Universidad Complutense de Madrid

jetayo@mat.ucm.es

Todo grupo finito G actúa como grupo de automorfismos de diversas superficies de Klein con borde. Al menor de los géneros algebraicos de estas superficies se le llama género real $\rho(G)$ del grupo G . Se sabe que todos los enteros positivos impares son género real de algún grupo. En cambio, no todos los pares lo son. C. L. May recopiló una serie de familias de grupos, a partir de las cuales obtuvo sucesiones aritméticas de géneros reales pares con las que se cubre gran parte del conjunto de los números pares. En particular, resultó que los números 2, 12 y 24 no son género real de ningún grupo. May se planteó si este era un fenómeno propio de números pequeños, o bien existen otros huecos en el espectro del género real, esto es, números N que no son el género real de ningún grupo. El primer número para el que esta cuestión permanecía abierta es 72. En el presente trabajo probamos que no existe ningún grupo de género real 72.

Agradecimientos. El primer autor está parcialmente subvencionado por PID2021-122752NB-I00 y UCM910444.

On Singular Map-Spectra Groups

Antonio Breda d'Azevedo, Domenico Catalano

Departamento de matemática, Universidad de Aveiro

breda@ua.pt

In a recent paper [1] we encountered certain peculiarities in the Euler characteristics of surfaces determined by map-generating pairs (a, z) in some groups G . Usually, Euler characteristics differ depending on the restricted regular maps that the pair represents. We explore one such peculiarity in the context of singular map-spectra groups. Given a group G generated by an involution a and an element z of order n , each map-generating pair (a, z) in G corresponds to three distinct restricted regular maps: a regular oriented map, a regular bi-oriented map, and a regular face-bi-oriented map, each determining its own Euler characteristic. A singular map-spectra group is defined as a group for which every map-generating pair (a, z) yields the same Euler characteristic, regardless of whether it represents a regular oriented map, a regular bi-oriented map, or a regular face-bi-oriented map.

References

- [1] A. Breda d'Azevedo, D. Catalano (2025). Orientability versus bi-orientability. *Ars Math. Contemp.*, accepted for publication.

Acknowledgments. The authors acknowledge support from The Center for Research and Development in Mathematics and Applications (CIDMA) through the Portuguese Foundation for Science and Technology (FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, grant references UIDB/04106/2020 and UIDP/04106/2020).

Comparing the real genus and the symmetric crosscap number of a group

Adrián Bacelo, José Javier Etayo, Ernesto Martínez...

Departamento Álgebra, Geometría y Topología, Universidad Complutense de Madrid

abacelo@ucm.es

Given a finite group G , there exist Klein surfaces, bordered X and unbordered non-orientable S , such that G acts as an automorphism group of X and of S . The minimum algebraic genus $\rho(G)$ of the surfaces X is called the real genus of G , and the minimal topological genus $\tilde{\sigma}(G)$ of the surfaces S is the symmetric crosscap number of G . In this work we study the relation between the real genus and the symmetric crosscap number of a group G and how both parameters can be compared. For instance, we see that there exist groups G such that the difference $\tilde{\sigma}(G) - \rho(G) = t$ for all even negative numbers t . In order to get it, we correct some inaccuracies in previous works, on these parameters for the groups $C_m \times D_n$ and $D_m \times D_n$. On the other hand, for some important families of groups, we prove that $\tilde{\sigma}(G) = \rho(G) + 1$. We use it to eliminate possible gaps in the symmetric crosscap spectrum, enforcing the conjecture that 3 is in fact the unique gap.

References

- [1] A. Bacelo, J. J. Etayo, E. Martínez. Filling gaps of the symmetric crosscap spectrum. *Moscow Math. J.* 17 (2017) 357-369.
- [2] A. Bacelo, J. J. Etayo, E. Martínez. The symmetric crosscap number spectrum of Abelian groups. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. RACSAM* 112 (2018) 633-640.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con José Javier Etayo y Ernesto Martínez. Proyecto parcialmente financiado por Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades con referencia PID2021-122752NB-I00.

The hunt for compact Riemann Surfaces with a transitive action on Weierstrass points

Pietro Speziali, Sebastián Reyes-Carocca

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica Universidade Estadual de Campinas

speziali@unicamp.br

Let X be a compact Riemann surface of genus $g > 2$. By the celebrated Hurwitz bound, the automorphism group $\text{Aut}(X)$ is finite and has size at most $84(g - 1)$. A classical result due to Lewittes states that if an automorphism σ of X fixes more than four points, then all of these fixed points are Weierstrass points. Moreover, $\text{Aut}(X)$ acts on the set W of Weierstrass points of X . A natural question is whether this action can be transitive.

This phenomenon is very rare: only a handful of examples are known, and until recently, the only infinite family was provided by the famous hyperelliptic Accola–Maclachlan curves, which exist in every genus. In our recent work [1], we provided the first infinite family of pairwise non-isomorphic, non-hyperelliptic curves with a transitive action on W ; all of these surfaces have genus 3.

On the other hand, there are genera where no such non-hyperelliptic surfaces exist; the smallest case is genus 6. Moreover, as far as the authors know, no non-hyperelliptic examples are known for $g > 7$. In this talk, we will present our ongoing research on this problem, with particular emphasis on identifying new examples in low genus.

References

- [1] S. Reyes-Carocca, P. Speziali (2024). Infinitely many Riemann surfaces with a transitive action on the Weierstrass points, *Bull London Math Soc.* 56 2625-2633.

Gluings of Riemann surfaces and their Jacobians

Rubí E. Rodríguez, Angel Carocca, Anita M. Rojas

Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile

rubi.rodriguez@ufroterra.cl

En esta charla discutiremos el “pegado de curvas” y de sus Jacobianos más allá de los casos usuales de géneros uno y dos.

Este problema tiene aplicaciones aritméticas y algebraicas interesantes, muchas aún por descubrir.

In this talk we will discuss the “gluing of curves” and their Jacobians beyond the usual cases of genera one and two.

This problem has arithmetic and algebraic interesting applications, many of them still to be discovered.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por Fondecyt 1230708.

Boundary of equisymmetric strata of Riemann surfaces with abelian automorphism groups

R. Díaz, V. González-Aguilera

Departamento Álgebra, Geometría y Topología, Universidad Complutense de Madrid

radiaz@ucm.es

The moduli space M_g of Riemann surfaces of genus g is an orbifold obtained as the quotient of Teichmüller space under the mapping class group. Its branch locus is naturally stratified, each strata corresponding to those Riemann surfaces whose automorphic groups act in the same (topological) way. The Deligne-Mumford compactification of M_g consists on adding the so called stable Riemann surfaces. A natural question is which topological types of stable Riemann surfaces appear in the boundary of a given equisymmetric stratum. A general procedure to determine this boundary is given in a previous work by the authors [1]. In this talk we particularize this procedure to strata with abelian actions, giving a quite complete answer for the cases of p -adic and hyperelliptic actions.

References

- [1] R. Díaz, and V. González-Aguilera, *Limits points on the branch locus of M_g* , Ad. Geom., 19, (4), 505-526, 2019.
- [2] R. Díaz, and V. González-Aguilera, *Boundary of equisymmetric loci of Riemann surfaces with abelian symmetry*, arXiv:2411.09836

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Víctor González-Aguilera. Proyecto parcialmente financiado por Spanish Research Project PID2020-114750GB-C32/AEI/10.13039/501100011033.

Clifford bundles over Klein surfaces

Ewa Tyszkowska

Gdansk University

ewa.tyszkowska@ug.edu.pl

Let V be a real vector space and let $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ be a quadratic form with the signature (r, s) . The *Clifford algebra* is an associative algebra $\text{Cl}_{r,s}$ together with a linear map $i : V \rightarrow \text{Cl}_{r,s}$ such that $i(v)^2 = -Q(v)1$ for all $v \in V$. Moreover, for any associative algebra C with unit 1_C and a linear map $F : V \rightarrow C$ satisfying $F(v)^2 = -Q(v)1_C$ for all $v \in V$, there exists a unique algebra homomorphism $\tilde{F} : \text{Cl}_{r,s} \rightarrow C$ such that $\tilde{F} \circ i = F$. In particular, by taking $C = \text{Cl}_{r,s}$ and $F = i \circ f$ for an orthogonal map f induced by $f(v) = -v$ for all $v \in V$, we get an automorphism $\tilde{F}$ of $\text{Cl}_{r,s}$. The subalgebra of $\text{Cl}_{r,s}$ fixed by this automorphism is denoted by $\text{Cl}_{r,s}^+$.

The *Pin group* is a multiplicative subgroup $\text{Pin}(r, s)$ of $\text{Cl}_{r,s}$ generated by the set $\{i(v) : v \in V \wedge Q(v) = \pm 1\}$ and $\text{Pin}(r, s) \cap \text{Cl}_{r,s}^+$ is called the *Spin group*. A subgroup $M_{r,s}$ of $\text{Pin}(r, s)$ generated by the images of an orthonormal basis of V is called the *base group*.

Let Y be a Klein surface Y of algebraic genus $d > 1$ with q boundary components and let $p = d + 1 - q$. We construct a principal $\text{Pin}(p, q)$ -bundle over Y and a principal $\text{Spin}(p, q)$ -bundle over the canonical double cover Y^+ of Y . We study vector bundles over Y and Y^+ associated to representations of the Pin and Spin groups and we show how isomorphisms of Clifford algebras affect these vector bundles. We represent a Klein surface as the connected sum of two other Klein surfaces and we find the relationships among their vector bundles.

On Non-Normal Subvarieties of the Moduli Space of Riemann Surfaces

En honor a Gabino González-Diez, por su extraordinaria contribución a la Matemática y su gran calidad humana.

Anita M. Rojas, Rubén Hidalgo, Jennifer Paulhus, Sebastián Reyes-Carocca

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile

anir Rojas@uchile.cl

We consider the irreducible subvarieties of the moduli space $\mathcal{M}_g$ of compact Riemann surfaces of genus $g \geq 2$ denoted by $\mathcal{M}_g(H, s, \theta)$. They represent isomorphism classes of surfaces endowed with the action of a group H with topological class determined by the surface-kernel epimorphism $\theta : \Delta \rightarrow H$, where Δ is a Fuchsian group of signature s . Such subvarieties are contained in the singular locus of $\mathcal{M}_g$ and, in general, are non-smooth. In [5], we consider certain subvarieties of this type and address the problem of determining which among them are non-normal.

We use a key fact proved by Gabino González-Diez and William Harvey [3] which states that the existence of a non-normal point $[X_0] \in \mathcal{M}_g(H, s, \theta)$ is closely related to the existence of groups of automorphisms of X_0 isomorphic to H acting on X_0 with topological class determined by θ and that are non-conjugate in the full automorphism group of X_0 .

Gabino González-Diez and Rubén Hidalgo constructed in [4] the first example of a non-normal subvariety of this type associated with regular cyclic covers of the projective line. Later, Mariela Carvacho in [1] generalised this construction. Javier Cirre in [2] constructed non-normal subvarieties of this type associated to regular non-cyclic covers of $\mathbb{P}^1$.

In this talk, we will explain these results and our work [5], where we construct subvarieties of this type in several moduli spaces. In particular, we show that for each $g \geq 2$ the moduli space $\mathcal{M}_g$ contains a non-normal subvariety of type $\mathcal{M}_g(H, s, \theta)$ where s is a genus zero signature.

References

- [1] M. Carvacho Bustamante (2013). Nonequivalent families of group actions on Riemann surfaces. *J. Pure Appl. Algebra* 217(12), 2345–2355.
- [2] F. J. Cirre (2004). On a subvariety of the moduli space.. *Rev. Mat. Iberoamericana* 20(3), 953–960.
- [3] G. González-Diez, W. Harvey (1992). Moduli of Riemann surfaces with symmetry. *Discrete groups and geometry* (Birmingham, 1991), London Math. Soc. Lecture Note Ser. 173, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 75–93.
- [4] G. González-Diez, R. Hidalgo (1997). Conformal versus topological conjugacy of automorphisms on compact Riemann surfaces. *Bull. London Math. Soc.* 29(3), 280–284.
- [5] R. Hidalgo, J. Paulhus, S. Reyes-Carocca, A. M. Rojas (2024). On Non-Normal Subvarieties of the Moduli Space of Riemann Surfaces. *Transformation Groups*. <https://doi.org/10.1007/s00031-024-09870-3>

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por Fondecyt ANID Regular 1230034, 1230001, 1220099 y 1230708.

Plane octic curves with $6 \mathbb{E}_6$ singular points and non hyperelliptic Riemann surfaces of genus 3

Enrique Artal Bartolo

Departamento de Matemáticas-IUMA, Universidad de Zaragoza

artal@unizar.es

In [1], several non isotopic families of plane curves of degree 8 having exactly 6 singular points (of type $\mathbb{E}_6$) are given, on both the algebraic and the symplectic categories. Unfortunately a complete classification was not obtained. In this talk, the goal is to share some approaches to this classification which relate this problem with some special divisors in non-hyperelliptic Riemann surfaces of genus 3.

References

- [1] E. Artal (2024). Algebraic and symplectic curves of degree 8. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 64(2), 81–103.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por PID2020-114750GB-C31, MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por el Departamento de Ciencia, Universidad y Sociedad del Conocimiento del Gobierno de Aragón (E22 20R: “Álgebra y Geometría”).

The minima of the geodesic length function for uniform filling curves

Ernesto Girondo, Gabino González-Diez, Rubén A. Hidalgo

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

ernesto.girondo@uam.es

A famous result, first proved by Kerckhoff, states that the geodesic length function determined by a curve that fills up a compact surface has a minimum in Teichmüller space, and that this minimum is unique. We exhibit explicitly these minima for a certain class of curves, showing that they are attained at the Grothendieck–Belyi surfaces determined by some dessin d'enfants naturally associated to these filling curves.

References

- [1] E. Girondo and G. González-Diez (2012) *Introduction to compact Riemann surfaces and dessins d'enfants*, vol. 79, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press.
- [2] E. Girondo, G. González-Diez, R. A. Hidalgo (2025). The minima of the geodesic length functions of uniform filling curves. *J. Lond. Math. Soc.*, (2) 111, no. 4, 1 Paper No. e70153, 24 pp.
- [3] S. P. Kerckhoff (1983), The Nielsen realization problem. *Ann. of Math.*, (2) 117 (1983), no. 2, 235–265.
- [4] S. A. Wolpert, Geodesic length functions and the Nielsen problem. *J. Differential Geom.*, 25 (1987), no. 2, 275–296.

Sesión especial 20

Matemática Discreta y Algorítmica (MDA)

Equipo organizador:

- *Maria Bras-Amorós* (Universitat Politècnica de Catalunya)
- *Pablo Candela* (Instituto de Ciencias Matemáticas)
- *Guillem Perarnau* (Universitat Politècnica de Catalunya, Centre de Recerca Matemàtica)
- *Francisco Santos* (Universidad de Cantabria)

Descripción

La matemática discreta estudia estructuras combinatorias o discretas, particularmente grafos, geometrías finitas, estructuras geométricas discretas y aspectos combinatorios de estructuras algebraicas y de teoría de números, y en ella los aspectos algorítmicos tienen una relevancia particular de forma natural. La sesión propuesta está auspiciada por la Red de Matemática Discreta y Algorítmica, financiada por el Ministerio de Ciencia e Innovación para el periodo 2025-2027 (RED2024-153572-T), y presentará una panorámica de la investigación actual del área en España.

Palabras clave: Matemática Discreta, Algoritmos, Combinatoria, Códigos, Geometría Discreta.

Programa

LUNES, 19 de enero

- 15:30 – 16:00 Aida Abiad (TU/Eindhoven)
The eigenvalue method in coding theory
- 16:00 – 16:30 Alberto Espuny Díaz (U. Barcelona)
Constructing structures in the budget-constrained random graph process
- 16:30 – 17:00 Daniel Palacín (U. Complutense Madrid)
Casi periodicidad desde una perspectiva modelo-teórica

MARTES, 20 de enero

- 11:00 – 11:30 Pedro A. García-Sánchez (U. Granada)
Descomposición de semigrupos numéricos en semigrupos irreducibles
- 11:30 – 12:00 Mónica Blanco (U. Cantabria)
Lattice zonotopes and the lonely runner conjecture
- 12:00 – 12:30 Rodrigo I. Silveira (U. Politècnica Catalunya)
When simple geometry gets hard: shortest paths with algebraic obstacles
- 15:30 – 16:00 Anna de Mier (U. Politècnica Catalunya)
Graphs with the same G -invariant but different configurations
- 16:00 – 16:30 Luis Pedro Montejano (U. Rovira Virgili)
On Roudneff's conjecture: advances and an interesting k -variant
- 16:30 – 17:00 Philippe Gimenez (U. Valladolid)
Additive combinatorics and commutative algebra, a sumsets approach
- 17:00 – 17:30 Diego Gonzalez-Sánchez (CNRS, IMJ-PRG)
Higher-order Fourier analysis via spectral algorithms
- 18:00 – 18:30 Irene Gil Fernández (CEU San Pablo)
An approach to Hoàng-Reed Conjecture
- 18:30 – 19:00 Bernardo González Merino (U. Murcia)
Recent developments on large signed subset sums of vectors

The eigenvalue method in coding theory

Aida Abiad

Department of Mathematics and Computer Science, Eindhoven University of Technology (TU/e)
Department of Mathematics and Data Science, Vrije Universiteit Brussel.

a.abiad.monge@tue.nl

In this talk, several new eigenvalue bounds on the independence number of graph powers will be presented. We will then illustrate an application of such bounds in coding theory. In particular, we will use them to estimate the maximum size of a code in the sum-rank metric, demonstrating how the spectral method can often improve the state of the art coding bounds.

Constructing structures in the budget-constrained random graph process

Alberto Espuny Díaz

Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona

aespuny@ub.edu

In this talk, I will present results concerning the budget-constrained random graph process introduced by Frieze, Krivelevich and Michaeli. Through this process, a player, called Builder, is presented with t distinct edges of K_n one by one, chosen uniformly at random. Builder may purchase at most b of these edges, and must (irrevocably) decide whether to purchase each edge as soon as it is offered, and their goal is to construct a graph which satisfies a certain property. The main goal is to understand asymptotically, for a given $t = t(n)$, the optimum b which suffices for Builder to construct a graph with the desired property (with high probability). I will present an overview of the state of the art in this model, discussing results concerning both spanning and local properties. For spanning properties, I will present new results about graph factors, graph covers and powers of Hamilton cycles. For local properties, I will discuss new results concerning building copies of K_4 . Our new results solve different problems proposed by Frieze, Krivelevich and Michaeli. These results come from joint works with Frederik Garbe, Tássio Naia and Zak Smith, and with Sylwia Antoniuk, Kalina Petrova and Miloš Stojaković.

Casi-periodicidad desde una perspectiva modelo-teórica

Daniel Palacin

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Facultad de Ciencias Matemáticas,
Universidad Complutense de Madrid

dpalacin@ucm.es

Los ultraproductos constituyen una herramienta básica para analizar, desde un punto de vista modelo-teórico, el comportamiento asintótico de una clase de estructuras. En un ultraproducto de grupos finitos, el ultralímite de la medida de contar normalizada induce una medida de Keisler, invariante bajo automorfismos y traslaciones, que ha desempeñado un papel crucial en los últimos años en varias aplicaciones de la teoría de modelos a la combinatoria aditiva.

En esta charla, presentaré un trabajo conjunto con Amador Martín-Pizarro en el que obtenemos un resultado de casi-periodicidad modelo-teórico, relacionado con el teorema de casi-periodicidad de Croot y Sisack, para grupos arbitrarios equipados con una medida de Keisler bajo ciertas hipótesis menores. Si el tiempo lo permite, indicaré brevemente cómo utilizar este resultado para obtener una demostración no cuantitativa del teorema de Roth sobre progresiones aritméticas de longitud 3. No se presupondrá ningún conocimiento previo de teoría de modelos.

Descomposición de semigrupos numéricos en semigrupos irreducibles

Pedro A. García-Sánchez, Christopher O'Neill

Departamento de Álgebra e IMAG, Universidad de Granada

pedro@ugr.es

Un semigrupo numérico es irreducible si no puede expresarse como la intersección de dos semigrupos numéricos que lo contengan propiamente. Cada semigrupo numérico puede expresarse como una intersección de (finitas) semigrupos numéricos irreducibles [2]. A esas expresiones que no sean “irredundantes” las llamaremos factorizaciones en irreducibles.

Mostramos que las uniones de conjuntos de longitudes de factorizaciones de semigrupos numéricos en semigrupos numéricos irreducibles son todas iguales a $\mathbb{N}_{\geq 2}$ [1].

Además, daremos algunos ejemplos de familias de semigrupos numéricos para los que el conjunto de longitudes de factorizaciones en irreducibles son intervalos (trabajo conjunto con C. O'Neill).

Referencias

- [1] P. A. García-Sánchez, Factorizations into irreducible numerical semigroups, Commun. Korean Math. Soc. 40 (2025) 587–592
- [2] J. C. Rosales and M. B. Branco, Decomposition of a numerical semigroup as an intersection of irreducible numerical semigroups, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 9 (2002), 373–381.

Agradecimientos. Esta investigación se ha llevado a cabo con la financiación del grupo FQM-343 y del Proyecto de Excelencia ProyExcel00868 de la Junta de Andalucía, el proyecto PID2022-138906NB-C21 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y fondos FEDER, además de por la RED2024-153572-T, financiada por la Agencia Estatal de Investigación.

Lattice zonotopes and the lonely runner conjecture

Mónica Blanco, Francisco Santos

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria

monica.blancogomez@unican.es

The lonely runner conjecture states that if n people are running around the circle, having started at the same time at the origin and with distinct and constant running velocities, there will be, for each of the runners, a moment in time in which they are "lonely", that is, at distance at least $\frac{1}{n}$ from the others. A stronger version of the conjecture, called "shifted", allows the runners to have different starting points.

It is known that there is no loss of generality in assuming the velocities to be integers, and that the conjecture can be interpreted geometrically as an obstruction property. Based on these facts, Henze and Malikiosis (2019) rephrased the conjecture (both the original and the shifted one) as a convex-geometric question on certain lattice zonotopes, which we will call LRZ (Lonely Runner Zonotopes) or sLRZ (for the shifted version).

In this talk I will discuss some recent work on the study of these zonotopes, and how we are hoping this will help towards proving the conjecture, at least in some cases.

Acknowledgments. Supported by grants PID2022-137283NB-C21, funded by, MCIN/AEI/10.13039/501100011033

When simple geometry gets hard: shortest paths with algebraic obstacles

Rodrigo I. Silveira

Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya

rodrigo.silveira@upc.edu

This talk explores two geometric shortest path problems that share a surprising trait: they are simple to state but deceptively difficult to solve. The first is the Weighted Region Problem, where the plane is subdivided into regions, each assigned a cost of traversal — some areas are “cheaper” to cross than others. The challenge is to find a shortest path according to this weighted cost. The second is the Shortest Descending Path problem, which considers a polyhedral terrain and two points, s and t , on its surface. The goal is to compute a shortest path from s to t that never ascends. For both problems, no efficient algorithms are known. The underlying difficulty appears to be algebraic: computing an optimal path requires solving algebraic equations that seem computationally intractable. In this talk, I will provide a gentle introduction to these two intriguing problems, summarize what is currently known about them, and highlight how algebraic obstacles may explain why they resist efficient algorithms.

Graphs with the same G-invariant but different configurations

Anna de Mier, Joseph E. Bonin, Kerri Morgan and Lluís Vena

Departament de Matememàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya

anna.de.mier@upc.edu

In 1974 W. Tutte introduced the rotor construction, that allowed him to construct "codichromatic" graphs (i.e., graphs with the same Tutte polynomial) up to 5-connectivity. We show that the same construction can be applied to yield graphs with the same G-invariant, which is a valutive matroid invariant that contains, in particular, the Tutte polynomial. This is to our knowledge the first known construction of such graphs (in contrast, several examples of non-graphic matroids with the same G-invariant are known.) . However, in the case of the G-invariant it applies only for 3-connectivity. Like the Tutte polynomial, the G-invariant is a matroid invariant, and as such depends only on the cycle structure of the graph. Also as the Tutte polynomial, one does not need the full cycle structure to compute the G-invariant, it is enough to know the "configuration" of the corresponding matroid. We show that the graphs we obtain not only have different associated matroids but also have different configurations.

Acknowledgments. This work was partially supported by grant PID2023-147202NB-I00 funded by MICIU/AEI/10.13039/501100011033.

On Roudneff's conjecture: advances and an interesting k -variant

Luis Pedro Montejano

Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques, Universitat Rovira Virgili

`luispedro.montejano@urv.cat`

J. P. Roudneff conjectured in 1991 that every arrangement of $n \geq 2d + 1 \geq 5$ pseudo-hyperplanes in the real projective space $\mathbb{P}^d$ has at most as many complete cells (i.e., cells bounded by each hyperplane) as the number of complete cells corresponding to the cyclic arrangements (i.e., the dual of the cyclic polytopes). I will talk about this conjecture and its interpretation in oriented matroid theory. I will discuss the progress of Roudneff's conjecture and also about a k -variant in which the cyclic polytopes once again play an important role.

Acknowledgments. We would like to thank the Spanish Ministry of Science and Innovation due to grant PID2023-146925OB-I00.

Additive combinatorics and commutative algebra, a sumsets approach

Philippe Gimenez, Ignacio García-Marco, Mario González-Sánchez

Instituto de Matemáticas de la Universidad de Valladolid (IMUVA)

pgimenez@uva.es

Given a finite nonempty subset $\mathcal{A}$ in $\mathbb{N}^d$, for all $s \geq 0$, the set $s\mathcal{A} = \{a_1 + \cdots + a_s, a_i \in \mathcal{A}\}$ is called the s -fold iterated sumset of $\mathcal{A}$. Additive combinatorics studies sumsets of $\mathcal{A}$ and their cardinality. On the other hand, if one takes a field $\mathbb{K}$ and $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{N}^d$, one can associate to each $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{id})$, the monomial $\mathbf{t}^{\mathbf{a}_i} = t_1^{a_{i1}} \times \cdots \times t_d^{a_{id}} \in \mathbb{K}[t_1, \dots, t_d]$, and define the ring homomorphism $\varphi_{\mathcal{A}}: \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}[t_1, \dots, t_d]$, $x_i \mapsto \mathbf{t}^{\mathbf{a}_i}$. This parametrically defines a toric variety and provides a toric ideal $I_{\mathcal{A}} = \ker \varphi_{\mathcal{A}}$. Based on recent results in [1], [2], [3], [4], [5], and some work in progress, we will show how the sumsets structure of $\mathcal{A}$ is related to the syzygies and, in particular, to the Castelnuovo-Mumford regularity, of the toric ideal $I_{\mathcal{A}}$. This illustrates the interplay between additive combinatorics and commutative algebra, exhibiting how each area can help to solve problems in the other one.

References

- [1] L. Colarte-Gómez, J. Elias and R.M. Miró-Roig (2023). Sumsets and Veronese varieties. *Collect. Math.*, 74, 353–374.
- [2] S. Eliahou, E. Mazumdar (2022). Iterated sumsets and Hilbert functions. *J. Algebra*, 593, 274–294.
- [3] J. Elias (2022). Sumsets and Projective Curves. *Mediterr. J. Math.*, 19:177, 11 pp.
- [4] P. Gimenez and M. González Sánchez (2023). Castelnuovo-Mumford regularity of projective monomial curves via sumsets, *Mediterr. J. Math.*, 20:287, 24 pp.
- [5] M. González-Sánchez (2025). *Syzygies, regularity, and their interplay with additive combinatorics*. PhD Thesis, University of Valladolid.

Acknowledgments. This work was partially supported by the grant PID2022-137283NB-C22 funded by MICIU/AEI/10.13039/501100011033 and ERDF/EU.

Higher-order Fourier analysis via spectral algorithms

Diego Gonzalez-Sánchez, Pablo Candela, Balázs Szegedy

Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), IMJ-PRG

`gonzalez.sanchez.diego@renyi.hu`

Fourier analysis is a powerful tool to analyze functions defined on compact abelian groups. During the past decades, advances in additive combinatorics and ergodic theory have led to the discovery of a new form of representation theory on compact abelian groups that generalizes Fourier analysis. This theory is known as higher-order Fourier analysis. Roughly speaking, while Fourier analysis deals with representing functions in terms of harmonics such as $\exp(2\pi i \xi x)$, higher-order Fourier analysis deals with representing functions in terms of higher order harmonics such as $\exp(2\pi i \xi x^2)$. In this talk, we will introduce such a theory and a recent joint work with Candela and Szegedy which aims at bridging the gap between higher-order Fourier analysis and possible applications.

Acknowledgments. This work is supported by Horizon Europe (HORIZON) via the Marie Skłodowska-Curie Actions (MSCA) Postdoctoral Fellowship number 101202161 funded by the European Union and by project PID2024-156180NB-I00 funded by the Ministry of Science, Innovation, and Universities of Spain.

An approach to Hoàng-Reed Conjecture

Irene Gil Fernández, Gaia Carenini

Universidad CEU San Pablo

irene.gilfernandez@ceu.es

Hoàng-Reed Conjecture states that every digraph in which each vertex has outdegree at least k contains k directed cycles $C_1, \dots, C_k$ such that C_j meets $\bigcup_{i=1}^{j-1} C_i$ in at most one vertex, for each $2 \leq j \leq k$. This conjecture was proved by M. Welhan (2010) for outdegree equal to 3, but his method does not seem to work for higher k . In this talk we try to show some work on progress together with G. Carenini on the resolution of this problem.

Recent developments on large signed subset sums of vectors

Bernardo González Merino

Departamento de Ingeniería y Tecnología de Computadores, Universidad de Murcia

bgmerino@um.es

The following question arises in some topics of Mathematics: for given $d \geq 2$, $n \geq d$ and $k \leq n$, what is the largest value $c(d, n, k)$ such that from any set of n unit vectors in $\mathbb{R}^d$, we may select k vectors with corresponding signs ± 1 so that their signed sum has norm at least $c(d, n, k)$? The problem is dual to classical vector sum minimization and balancing questions, which have been studied for over a century.

On the one hand, we will explain most of the known results regarding both exact values of $c(d, n, k)$ for small values of the parameters as well as sharp asymptotic estimates when some of the parameters tend to infinity. On the other hand, we will briefly show some recent developments on this topic, such as the solution by F. Grundbacher to the exact computation of $c(3, 4, 4) = \sqrt{5}$.

Sesión especial 21

Matemáticas aplicadas a las geociencias, los sistemas dinámicos y la ciencia de datos

Equipo organizador:

- *David García García* (Universidad de Alicante)
- *Lorena Segura Abad* (Universidad de Alicante)
- *Isabel Vigo Aguiar* (Universidad de Alicante)
- *Juan Adrián Vargas Alemañy* (Universidad de Alicante)

Descripción

El área de Matemática Aplicada de la Universidad de Alicante integra varias líneas de investigación, como son la geodesia espacial, rotación de la tierra, sistemas dinámicos, simulaciones numéricas y ciencia de datos. En esta sesión se dará un amplio recorrido sobre la importancia de las Matemáticas en estas estas temáticas, centrándonos en algunos de los trabajos más recientes de los grupos integrantes.

Palabras clave: geodesia espacial; rotación de la tierra; sistemas dinámicos; simulaciones numéricas; ciencia de datos.

Programa

JUEVES, 22 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:30 | David García García (Universidad de Alicante)
<i>Estimaciones de los flujos horizontales netos de agua en el océano a partir de GRACE/GRACE-FO y ERA5</i> |
| 11:30 – 12:00 | Isabel Vigo Aguiar (Universidad de Alicante)
<i>Estimación de las corrientes geostróficas globales con alta resolución espacial derivada de datos de satélite</i> |
| 12:00 – 12:30 | Juan A. Vargas Alemañy (Universidad de Alicante)
<i>Uso de Datos Satelitales para el Estudio del Momento Angular del Océano</i> |
| 12:30 – 13:00 | Ignacio Martínez Caballero (Universidad de Alicante)
<i>Integración de teoría de redes y dinámica lagrangiana para el estudio de la dispersión de <i>Aristeus antennatus</i> (gamba roja) en el Mar Mediterráneo</i> |
| 15:30 – 16:00 | José Manuel Ferrándiz (Universidad de Alicante)
<i>Teorías actuales de la rotación terrestre y sus precedentes</i> |
| 16:00 – 16:30 | Santiago Belda Palazón (Universidad de Alicante)
<i>Rigorous Estimation of terrestrial and celestial references frames and Earth Orientation Parameters from VLBI Observations Using Advanced Mathematical Models</i> |
| 16:30 – 17:00 | Juan F. Navarro Llinares (Universidad de Alicante)
<i>Escape en el problema fotogravitacional de Copenhague</i> |
| 17:00 – 17:30 | María del Carmen Martínez Belda (Universidad de Alicante)
<i>Análisis de la geometría del escape en el problema del anillo de $N + 1$ cuerpos</i> |

VIERNES, 23 de enero

- | | |
|---------------|---|
| 11:00 – 11:30 | Alberto Perez Cervera (Universidad de Alicante)
<i>Descripción global de dinámicas oscilatorias a través del Método de la Parametrización</i> |
| 11:30 – 12:00 | Laura Moreno Martínez (Universidad de Alicante)
<i>Simulación numérica de flujos viscoplásticos mediante formulaciones mixtas con MPM en contextos hidrológicos extremos</i> |
| 12:00 – 12:30 | Miguel Alejandro Plana Torregrosa (Universidad de Alicante)
<i>Técnicas y análisis de causalidad en el ámbito de la ciencia de datos</i> |

Estimaciones de los flujos horizontales netos de agua en el océano a partir de GRACE/GRACE-FO y ERA5

David García García, Kamel Boulahia, Mario Trottini, Juan A. Vargas–Alemañy,
Juan–Manuel Sayol, Isabel Vigo

Departamento Matemática Aplicada e Ingeniería Aeroespacial, Universidad de Alicante

d.garcia@ua.es

En el océano, los flujos horizontales de agua pueden estimarse a partir de diversas mediciones in situ y modelos de circulación general oceánica. Sin embargo, el estudio de dichos flujos mediante mediciones remotas ha sido muy complicado durante décadas. En los últimos años, se ha desarrollado una técnica que permite calcular los transportes netos de agua oceánica entre cuencas a partir de: (1) mediciones temporales de gravedad realizadas por las misiones GRACE y GRACE-FO; (2) precipitaciones y evaporaciones globales, como las del modelo de reanálisis atmosférico ERA5. En este trabajo, mostramos una recopilación de los resultados obtenidos con esta técnica, como el intercambio neto de agua entre cuencas oceánicas [1] y entre mares semicerrados (mares Negro, Mediterráneo [2] y Báltico [3], y el golfo Árabe [4]) y el océano abierto. Estos resultados son útiles para comprender la dinámica oceánica y proporcionar restricciones para los modelos oceánicos numéricos.

Referencias

- [1] D. García-García, I. Vigo, M. Trottini (2020). Water transport among the world ocean basins within the water cycle. *Earth Syst. Dynam.* 11, 1089–1106. <https://doi.org/10.5194/esd-11-1089-2020>, 2020.
- [2] D. García-García, I. Vigo, M. Trottini (2022). Hydrological cycle of the Mediterranean-Black Sea system. *Climate Dynamics* 59, 1919–1938. <https://doi.org/10.1007/s00382-022-06188-2>.
- [3] A. K. Boulahia, D. García-García, M. Trottini, J.-M. Sayol, M. I. Vigo. (2022). The water cycle of the Baltic Sea region from GRACE/GRACE-FO missions and ERA5 data. *Front. Earth Sci.* 10:879148, 1–13. doi: 10.3389/feart.2022.879148.
- [4] A. K. Boulahia, D. García-García, M. Trottini, J.-M. Sayol, M. I. Vigo. (2024). Hydrological Cycle in the Arabian Sea Region from GRACE/GRACE-FO Missions and ERA5 Data. *Remote Sens.* 16, 3577. <https://doi.org/10.3390/rs16193577>. 2024

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por proyectos nacionales (RTI2018-093874-B-I00 y PID2021-122142OB-I00 financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033), de la Generalitat Valenciana (PROMETEO/2021/030) y Generalitat Valenciana y Fondo Social Europeo (APOSTD/2020/254).

Estimación de las corrientes geostróficas globales con alta resolución espacial derivada de datos de satélite

Isabel Vigo Aguiar, Juan A. Vargas–Alemañy, David García García

Departamento Matemática Aplicada e Ingeniería Aeroespacial, Universidad de Alicante

vigo@ua.es

El océano es un sistema dinámico influenciado por una multitud de fuerzas físicas, entre ellas la gravedad, la fricción, los gradientes de presión y la fuerza de Coriolis. Entre ellas, las corrientes geostróficas (GC, por sus siglas en inglés, igual que los siguientes acrónimos) emergen como un componente crucial de la circulación oceánica, desempeñando un papel fundamental en la configuración del sistema climático de la Tierra. La estimación geodésica de las corrientes geostróficas superficiales es factible mediante datos satelitales. Aprovechando los datos de la altura de la superficie del mar (SSH) obtenidos por altimetría satelital y un geoide independiente derivado de datos de gravedad satelital, en particular del satélite GOCE, es posible determinar la topografía dinámica absoluta (ADT). Utilizando la ADT, se deriva el campo de velocidad de las corrientes geostróficas superficiales (SGC) a través de derivadas parciales a lo largo de la latitud y la longitud. Posteriormente, estas corrientes se propagan hacia abajo, utilizando perfiles de temperatura y salinidad [1, 2]. Este estudio presenta estimaciones de la GC para toda la circulación oceánica global con una resolución espacial de $0.25^\circ \times 0.25^\circ$ de manera uniforme en todas las profundidades. Nuestro análisis abarca la compleja interacción de las corrientes oceánicas en todo el mundo, captando características destacadas como la corriente del Golfo, la corriente circumpolar antártica y la corriente de Kuroshio. La validación de nuestros hallazgos se lleva a cabo mediante la comparación con diversas mediciones in situ en diferentes corrientes y regiones de estrangulamiento, incluidos el paso de Drake y el estrecho de Gibraltar. En resumen, nuestra investigación ofrece información valiosa para la estimación de las corrientes geostróficas globales utilizando datos obtenidos por satélite, lo que arroja luz sobre los procesos dinámicos que rigen la circulación oceánica.

Referencias

- [1] I. Vigo, D. García-García, M. D. Sempere, B. F. Chao, 3D (2018). Geostrophy and Volume Transport in the Southern Ocean. *Remote Sensing* 10, 715, 1–18, doi: 10.3390/rs10050715.
- [2] J. A. Vargas-Alemañy, M. I. Vigo, D. García-García, Z. Ferdous (2023). Updated geostrophic circulation and volume transport from satellite data in the Southern Ocean. *Front. Earth Sci.* 11:1110138. doi: 10.3389/feart.2023.1110138.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por un proyecto nacional (PID2021-122142OB-I00 financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033) y otro de la Generalitat Valenciana (PROMETEO/2021/030).

Uso de Datos Satelitales para el Estudio del Momento Angular del Océano

*Juan A. Vargas–Alemañy, Isabel Vigo Aguiar, David García García,
José Manuel Ferrándiz Leal, Mario Trottini*

Departamento Matemática Aplicada e Ingeniería Aeroespacial, Universidad de Alicante

juan.vargas@ua.es

El momento angular del océano (OAM, por sus siglas en inglés) experimenta variaciones debido tanto a los cambios en la distribución de la masa oceánica como a las modificaciones en la dirección y velocidad de las corrientes marinas. Comprender estas variaciones es de gran relevancia, ya que el OAM influye en varios componentes del sistema Tierra, incluida la rotación del planeta. Si bien existen diversos productos que estiman estos cambios, todos ellos se basan en modelos globales de circulación oceánica. Una alternativa a los modelos es el uso de observaciones satelitales para estimar las corrientes geostróficas (GC, por sus siglas en inglés), que representan una parte dominante de la circulación oceánica global. Estas corrientes surgen del equilibrio entre la fuerza de Coriolis y el gradiente de presión, y pueden ser estimadas utilizando datos geodésicos obtenidos por misiones satelitales. Al combinar información de altura de la superficie del mar (SSH) proveniente de altimetría satelital, un geoide independiente derivado de datos de gravedad por satélite es posible calcular las GC. A partir de las corrientes superficiales así estimadas, se pueden derivar perfiles de GC a distintas profundidades utilizando distribuciones verticales de temperatura y salinidad. Estas estimaciones de GC basadas en datos satelitales permiten calcular el OAM de forma independiente de los modelos. El OAM derivado de este enfoque se compara con otros productos existentes, y se anticipa que ofrezca estimaciones más fiables, dado que las GC obtenidas por satélite presentan una mejor concordancia con las mediciones in situ que aquellas generadas mediante modelos.

Integración de teoría de redes y dinámica lagrangiana para el estudio de la dispersión de *Aristeus antennatus* (gamba roja) en el Mar Mediterráneo

Ignacio Martínez Caballero, Juan Manuel Sayol, David García, Mario Trottini, César Bordehore, Isabel Vigo

Departamento Matemática Aplicada e Ingeniería Aeroespacial, Universidad de Alicante

ignacio.martinezcaballero@ua.es

En los últimos años la captura mediante pesca de arrastre de *Aristeus antennatus* (gamba roja) muestra un declive en los alrededores del canal de Ibiza. En este estudio se combina la aplicación de la teoría de redes con simulaciones lagrangianas con la intención de ayudar a mitigar este declive mediante la simulación de diferentes escenarios de protección de poblaciones. Así, a partir de campos de corrientes oceánicas de alta resolución espacial provenientes de un modelo numérico, y datos biológicos de *Aristeus antennatus*, se ha simulado la dispersión en toda la columna de agua durante las fases larvales mediante una aproximación lagrangiana. A continuación, las posiciones finales simuladas se usan para estudiar su conectividad espacial, y las zonas potenciales de retención y dispersión.

Agradecimientos. Este estudio forma parte del Programa ThinkInAzul y ha sido parcialmente financiado por la Generalitat Valenciana (GVA-THINKINAZUL/2021/035); cuyos investigadores principales son Isabel Vigo y César Bordehore. Además, este trabajo ha sido parcialmente financiado por el programa de investigación e innovación Horizonte Europa de la Unión Europea en virtud del acuerdo de subvención n.º Proyecto: 101212647 — SEA4FUTURE — HORIZON-MISS-2024-OCEAN-01. (No obstante, las opiniones y puntos de vista expresados son exclusivamente los de los autores y no reflejan necesariamente los de la Unión Europea ni los de Universidad de Alicante. Ni la Unión Europea ni la autoridad que concede la subvención se hacen responsables de ellos).

Teorías actuales de la rotación terrestre y sus precedentes

José Manuel Ferrándiz, Alberto Escapa, Santiago Belda, Maria Karbon

Departamento Matemática Aplicada e Ingeniería Aeroespacial, Universidad de Alicante

jm.ferrandiz@ua.es

Desde tiempos inmemoriales la humanidad ha necesitado conocer su entorno próximo y lejano. Por ejemplo, el movimiento de la Tierra en el espacio, tanto su rotación como su traslación u órbita, era útil para predecir los cambios de las estaciones y la longitud del día, o para predecir los eclipses junto con el movimiento de la Luna. Sabemos que los babilonios habían descubierto el periodo de saros y que grandes pensadores griegos de los siglos III y II a.C., como Eratóstenes e Hiparco, fueron capaces de determinar con bastante precisión la oblicuidad de la eclíptica, el radio de la Tierra o la distancia al Sol, usaban la latitud y la longitud para el posicionamiento sobre la superficie esférica e incluso pusieron los fundamentos de la futura trigonometría o el cálculo infinitesimal, aunque gran parte de sus trabajos se han perdido y se conocen por referencias. Pero es a partir de Newton y Euler cuando los métodos necesarios para estudiar las órbitas y la rotación de los cuerpos celestes, en particular la Tierra y la Luna, empiezan a desarrollarse de forma espectacular, surgiendo una multitud de conceptos teóricos y métodos prácticos en los que se puede seguir profundizando aunque a veces no se conozca su origen. En el siglo XX se impusieron los métodos variacionales, siendo el lagrangiano reemplazado por el hamiltoniano asociado con los métodos de perturbaciones ayudados con cálculo simbólico. En esta presentación nos centraremos en ofrecer una selección de los elementos de las teorías actuales, que combinan herramientas analíticas con métodos computacionales para llegar a obtener soluciones que están ya muy cerca de lograr la altísima precisión impuesta por la observación de las variaciones del nivel del mar, es decir, un milímetro.

Agradecimientos. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Generalitat Valenciana (SEJIGENT/2021/001), la Unión Europea-NextGenerationEU (ZAMBRANO 21-04) y por el proyecto español PID2020-119383GB-I00 financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación (MCIN/AEI/10.13039/501100011033/).

Rigorous Estimation of terrestrial and celestial references frames and Earth Orientation Parameters from VLBI Observations Using Advanced Mathematical Models

Santiago Belda, Maria Karbon, Alberto Escapa, José Manuel Ferrándiz

Departamento Matemática Aplicada e Ingeniería Aeroespacial, Universidad de Alicante

santiago.belda@ua.es

At the University of Alicante, we are conducting a comprehensive analysis of Very Long Baseline Interferometry (VLBI) data with the aim of improving the estimation of the Terrestrial Reference Frame (TRF), the Celestial Reference Frame (CRF), and Earth Orientation Parameters (EOP). Our approach is grounded in advanced theoretical frameworks and rigorous mathematical methodologies to dynamically model and estimate these geodetic and astrometric parameters, allowing for a robust treatment of temporal correlations and stochastic processes. The methodology integrates state-of-the-art models for precession-nutation, station motion, and signal propagation, ensuring consistency with IERS conventions while exploring refinements based on recent geophysical insights. Special attention is given to the analysis and prediction of Free Core Nutation (FCN) and Celestial Pole Offsets (CPO), where high-precision VLBI data allow us to test theoretical predictions against empirical time series. This contribution highlights the interplay between mathematical modelling and geodetic analysis, showing how rigorous estimation strategies can yield significant advances in global reference frames and Earth system science. Our work supports not only fundamental geodesy but also applications in space navigation, Earth observation, and astronomy.

Acknowledgments. This work was partially supported by Generalitat Valenciana (SEJIGENT/2021/001, PROMETEO/2021/030), the European Union-NextGenerationEU (ZAMBRANO 21-04) and by Spanish Project PID2020-119383GB-I00 funded by Ministerio de Ciencia e Innovación (MCIN/AEI/10.13039/501100011033/).

Escape en el problema fotogravitacional de Copenhague

Juan F. Navarro Llinares

Departamento Matemática Aplicada e Ingeniería Aeroespacial, Universidad de Alicante

jf.navarro@ua.es

El problema de Copenhague es un caso particular del problema plano restringido de tres cuerpos en el que los dos primarios masivos tienen la misma masa. Este problema ha vuelto a atraer la atención de la comunidad científica debido al descubrimiento reciente de cientos de sistemas extrasolares compuestos por pocos cuerpos. Algunos de estos sistemas son sistemas binarios de estrellas, y otros están formados por una estrella y un planeta de masas parecidas en rotación en torno a su centro de masas. En este trabajo, consideramos que uno de los dos cuerpos es una fuente de radiación y estudiamos el modo en que su factor de reducción afecta a la geometría de las cuencas de escape del sistema.

Análisis de la geometría del escape en el problema del anillo de $N + 1$ cuerpos

M. Carmen Martínez Belda, Zahra Bouregghda, Juan F. Navarro Llinares

Departamento Matemática Aplicada e Ingeniería Aeroespacial, Universidad de Alicante

carmen.martinez@ua.es

La dinámica de múltiples cuerpos es clave para el estudio de sistemas exoplanetarios, anillos planetarios y misiones espaciales. En este contexto, el problema del anillo de $N + 1$ cuerpos es un modelo instructivo para explorar sistemas celestes. Éste consiste en el estudio del movimiento de una partícula de masa despreciable bajo la influencia gravitatoria de $N + 1$ cuerpos, de forma que N de ellos, de idéntica masa, m , están dispuestos en los vértices de un polígono regular y están girando alrededor de otro cuerpo, de masa m_0 , que se sitúa en el centro de la configuración. La dinámica de la geometría de escape en este sistema depende de tres parámetros: el número de cuerpos periféricos, N , la razón de masas, $\beta = m_0/m$ y la integral primera conocida del sistema, C , llamada constante de Jacobi. En este trabajo, hacemos una revisión de los últimos hallazgos en el análisis de la geometría de las curvas de velocidad cero, las cuencas de escape y la probabilidad de escape en función de N , β y C .

Descripción global de dinámicas oscilatorias a través del Método de la Parametrización

Alberto Pérez–Cervera, Tere M. Seara y Gemma Huguet

Departamento Matemática Aplicada e Ingeniería Aeroespacial, Universidad de Alicante

alberto.perezc@ua.es

La técnica de reducción de fase es un método ampliamente utilizado para estudiar de forma simple dinámicas oscilatorias. Esta técnica ha dado lugar, a través de las conocidas como Curvas de Respuesta de Fase, a un fructífero método de análisis tanto de osciladores acoplados como de respuesta a perturbaciones. Sin embargo, el dominio de aplicación de estas técnicas se ve restringido a perturbaciones o acoplamiento débil debido a que asume que las trayectorias están sobre el ciclo límite. En este trabajo proporcionamos una metodología basada en el método de la parametrización que permite extender estas técnicas a la variedad invariante del ciclo límite. El método de la parametrización proporciona, mediante algoritmos eficientes, una parametrización de la variedad invariante del ciclo límite en términos de las variables fase-amplitud. El método tiene varias ventajas. Proporciona analíticamente una expansión de Fourier-Taylor de la parametrización hasta cualquier orden, así como una simplificación de la dinámica, facilitando así la globalización numérica de las variedades. De esta forma, se puede obtener un retrato geométrico de la dinámica oscilatoria a través de las isocronas e isoestables locales y globales. Además, nuestro método proporciona directamente las funciones infinitesimales de respuesta de fase y amplitud, las cuales controlan los desplazamientos de fase y amplitud más allá del estado asintótico. De esta forma, la metodología presentada arroja una descripción precisa de la dinámica de fase para perturbaciones no restringidas al ciclo límite, sino a su variedad invariante de atracción. Finalmente, exploramos algunas estrategias para reducir la dimensión de la dinámica, incluyendo la reducción de la dinámica a la variedad estable lenta. Ilustramos nuestros métodos aplicándolos a diferentes modelos tridimensionales de neurona única y de población neuronal en neurociencia.

Simulación numérica de flujos viscoplásticos mediante formulaciones mixtas con MPM en contextos hidrológicos extremos

Laura Moreno Martínez, Antonia Larese, Roland Wuechner

Departamento Matemática Aplicada e Ingeniería Aeroespacial, Universidad de Alicante

laura.morenomartinez@ua.es

La modelización y simulación numérica de fenómenos naturales extremos, como deslizamientos de tierra que impactan sobre cuerpos de agua, oleajes inducidos por movimientos rápidos del terreno, procesos hidrodinámicos en el océano o interacciones de flujos con estructuras en entornos montañosos, costeros u oceánicos, es fundamental para comprender su dinámica y desarrollar herramientas predictivas robustas. En estos escenarios, la simulación de flujos viscoplásticos resulta especialmente desafiante desde el punto de vista matemático y computacional, debido a la coexistencia de materiales con comportamientos distintos (como flujos granulares y fluidos), las grandes deformaciones y la presencia de superficies libres. En este trabajo se propone una formulación mixta estabilizada para el Material Point Method (MPM) en su versión implícita, diseñada específicamente para simular este tipo de fenómenos. El MPM puede entenderse como un método de elementos finitos enriquecido, donde la discretización del dominio combina una malla de referencia con partículas que transportan las variables de estado. Esta característica lo hace especialmente adecuado para tratar problemas con grandes desplazamientos, cambios topológicos y simulaciones hidrodinámicas en dominios complejos. La formulación propuesta está inspirada en enfoques clásicos de la mecánica de sólidos no lineal y permite modelizar tanto comportamientos sólidos como fluidos mediante la elección adecuada de la ley constitutiva. En particular, el marco desarrollado es aplicable a la simulación de flujos incompresibles como el agua, lo que abre la puerta a su uso en la modelización de la circulación oceánica y oleaje a alta resolución. En este contexto, las formulaciones basadas únicamente en el desplazamiento se vuelven inestables debido a la violación de la condición inf-sup. Para evitar este problema, se introduce una formulación mixta desplazamiento–presión, estabilizada mediante un enfoque de multiescala variacional (VMS), que garantiza estabilidad numérica y precisión en el campo de presiones. Se presentan distintos ejemplos numéricos que validan la metodología y ponen de manifiesto su robustez frente a problemas computacionalmente exigentes.

Acknowledgments. This work was supported by the European Union’s Horizon Europe research and innovation programme under grant agreement No Project: 101212647 — SEA4FUTURE — HORIZON- MISS-2024-OCEAN-01. (Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or Universidad de Alicante. Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them).

Técnicas y análisis de causalidad en el ámbito de la ciencia de datos

Miguel Alejandro Plana Torregrosa, Kristian Alonso Stenberg, Lorena Segura Abad,
Josué Antonio Nescolarde Selva, Miguel Lloret Climent

Departamento Matemática Aplicada e Ingeniería Aeroespacial, Universidad de Alicante

mapt3@gcloud.ua.es

En el contexto actual de la ciencia de datos, la inferencia causal ha cobrado una relevancia creciente como herramienta para interpretar y explicar fenómenos más allá de la mera correlación estadística. A diferencia de los enfoques descriptivos o predictivos tradicionales, el análisis causal permite responder a preguntas del tipo “¿qué pasaría si...?”, proporcionando un marco más sólido para la toma de decisiones basada en datos. Esta ponencia tiene como objetivo principal ofrecer una introducción matemática rigurosa, clara y accesible a los fundamentos teóricos y prácticos de la causalidad en ciencia de datos, que se ha implementado en lenguajes como R y Python, con especial atención a su aplicabilidad en contextos reales, en particular, al mercado inmobiliario español. En esta ponencia no se persigue únicamente acercarse a la teoría matemática del análisis causal, sino mostrar también su valor añadido en la construcción de modelos más interpretables, accionables y socialmente responsables en el ámbito de la ciencia de datos.

Referencias

- [1] J. Pearl, D. Mackenzie (2020) *The book of why: The new science of cause and effect*. New York: Basic books..
- [2] C. W. Granger (1969). Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica* 37 (3), 424.
- [3] K. H. Brodersen, F. Gallusser, J. Koehler, N. Remy, S. L. Scott (2015). Inferring causal impact using bayesian structural time-series models. *The Annals of Applied Statistics*, 9(1).
- [4] K. Alonso-Stenberg (2020). *Diseño e implementación de un simulador de análisis causal*. Tesis doctoral, Universidad de Alicante, España.

Sesión especial 22

Matemáticas en la Sociedad de la Información: Criptografía

Equipo organizador:

- *Miguel Beltrá Vidal* (Universidad de Alicante)
- *Sara Díaz Cardell* (Universidad Estadual Paulista)
- *Verónica Requena Arévalo* (Universidad de Alicante)

Descripción

La teoría de la información fue introducida por Claude Shannon y Warren Weaver a finales de los años 40. Corresponde a una rama de las matemáticas y de la computación que estudia la transmisión y el procesamiento de datos. La criptografía es un método de protección de la información y las comunicaciones; además de una herramienta fundamental en la protección de la privacidad y la seguridad en la era digital, y su relación con las matemáticas es crucial. El objetivo de la criptografía es diseñar, implementar, implantar, y hacer uso de sistemas criptográficos para dotar de alguna forma de seguridad. La combinación de criptografía y tecnología proporciona la base para una infraestructura digital segura y eficiente en esta era digital. En esta sesión pretendemos recoger distintas nociones, métodos y algoritmos propios del álgebra, la geometría, la combinatoria, la estadística y la computación, que están siendo desarrolladas por diferentes investigadoras e investigadores españoles, atendiendo al área de la criptografía y sus variantes.

Palabras clave: Criptografía (94A60); Teoría de Códigos Algebraica: Criptografía (11T71); Aplicaciones a la Teoría de Códigos y la Criptografía de la Geometría Aritmética (14G50); Cifrado de datos (68P25); Criptografía Cuántica (81P94).

Programa

JUEVES, 22 de enero

- 11:00 – 11:30 Luís Hernández Encinas (CSIC)
Estándares de la Criptografía Postcuántica y más
- 11:30 – 12:00 Agustín Martín Muñoz (CSIC)
Ataques por canal lateral usando inteligencia artificial
- 12:00 – 12:30 Domingo Gómez Pérez (Universidad de Cantabria)
Cyclotomic Mappings and Plateau Functions: Exploring Generalizations of APN Structures in Finite Fields
- 12:30 – 13:00 Slobodan Petrović (Norwegian University of Science and Technology)
El diseño de cifrados en flujo en el entorno no binario
- 15:30 – 16:00 Ander Chueca Rodríguez (Universidad de León)
Propuesta de Algoritmo de Cifrado de Imágenes Usando Caos y Autómatas Celulares
- 16:00 – 16:30 José Andrés Armario (Universidad de Sevilla)
Nonlinear Approximations in Linear Cryptanalysis using Hadamard Matrices
- 16:30 – 17:00 Ignacio Cascudo (IMDEA Software Institute)
Exceptional cliques of integer matrices and applications to secret sharing and zero-knowledge proofs
- 17:00 – 17:30 Irene Urrutia Calvo (Universidad Carlos III de Madrid)
Construcciones criptográficas basadas en grupos lineales de matrices
- 18:00 – 18:30 Raúl M. Falcón (Universidad de Sevilla)
Using mutually orthogonal local permutation polynomials in image symmetric encryption

VIERNES, 23 de enero

- 11:00 – 11:30 Iván Blanco Chacón (Universidad de Alcalá)
Fast Polynomial Arithmetic in Homomorphic Encryption with Cyclotomic Fields and maximal totally real cyclotomic
- 11:30 – 12:00 Rodrigo Martín Sánchez-Ledesma (Universidad Complutense de Madrid, Indra Sistemas de Comunicaciones Seguras)
Ataques a instancias PLWE totalmente factorizables vía isomorfismos explícitos
- 12:00 – 12:30 Antonio Falcó (Universidad CEU Cardenal Herrera)
A computational approach to the Regev Quantum Factorization Algorithm

Estándares de la Criptografía Postcuántica y más

Luis Hernández Encinas, Luis Hernández-Álvarez, Agustín Martín Muñoz

Instituto de Tecnologías Físicas y de la Información (ITEFI)
Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC)

luis.h.encinas@csic.es

En la bienal de la RSME de 2024 [1] presentamos la convocatoria del NIST para la criptografía postcuántica (PQC) y la publicación de los borradores considerados. Nos detuvimos en los problemas definidos sobre retículos dado que cuatro de los borradores basaban su seguridad en ellos.

A día de hoy tenemos más noticias, que abordaremos en esta charla, y algunos aspectos más:

1. Se han publicado tres de los cuatro estándares aprobados por el NIST: ML-KEM [2] y ML-DSA [3], basados en retículos y SLH-DSA [4], basada en hashes. Falta por publicarse FALCON [5] o FN-DSA.
2. Todo apunta a que uno de los KEM rechazados por el NIST puede ser estandarizado por ISO/IEC; se trata de FrodoKEM [6].
3. Se ha aprobado un nuevo KEM estándar: HQC [7], que basa su seguridad en códigos correctores de errores. Hecho previsible, para evitar la dependencia exclusiva de los retículos.
4. Además, continúa la nueva convocatoria del NIST para firmas digitales, ya en la Ronda 2, donde se vuelven a considerar problemas descartados anteriormente: los sistemas de ecuaciones multivariantes cuadráticas y las isogenias entre curvas elípticas.

Referencias

- [1] L. Hernández Encinas, Futuros Estándares de la Criptografía Postcuántica, Congreso Bienal de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), Sesión especial de Criptografía. Pamplona, 23 de enero 2024.
- [2] NIST (2024). *Module-Lattice-Based Key-Encapsulation Mechanism Standard*, FIPS 203. <https://doi.org/10.6028/NIST.FIPS.203>
- [3] NIST (2024). *Module-Lattice-Based Digital Signature Standard*, FIPS 204. <https://doi.org/10.6028/NIST.FIPS.204>.
- [4] NIST (2024), *Stateless Hash-Based Digital Signature Standard*, FIPS 205. <https://doi.org/10.6028/NIST.FIPS.205>.
- [5] T. Prest, P.-A. Fouque, J. Hoffstein et al. (2020). FALCON, <https://falcon-sign.info/>.
- [6] E. Alkim, J.W. Bos, L. Ducas et al. (2021). FrodoKEM learning with errors key encapsulation, <https://frodokem.org/>
- [7] C. Aguilar Melchor, N. Aragon, S. Bettaieb et al. (2020). HQC (Hamming Quasi-Cyclic), <http://pqc-hqc.org/index.html>

Agradecimientos. Trabajo parcialmente financiado por el CSIC, a través del proyecto *Seguridad Algebraica y Aplicaciones de la Inteligencia Artificial en la Criptología Actual y Postcuántica* (SAIACAP), Nº. Ref.: 202450E017.

Ataques por canal lateral usando inteligencia artificial

Agustín Martín Muñoz, Luis Hernández-Álvarez, Luis Hernández Encinas

Instituto de Tecnologías Físicas y de la Información (ITEFI)
Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC)

agustin.martin@csic.es

Los ataques a las implementaciones de los criptosistemas en dispositivos físicos, comúnmente conocidos como ataques por canal lateral, suponen desde 1996 una importante amenaza a la seguridad de dichos criptosistemas. A lo largo de los años se han propuesto numerosos tipos de ataque, utilizando por ejemplo técnicas diferenciales (DPA, *Differential Power Analysis*), correlación (CPA, *Correlation Power Analysis*), información mutua (MIA, *Mutual Information Analysis*) o plantillas (TA, *Template Attacks*). Más recientemente, los ataques basados en técnicas de aprendizaje automático (ML, *Machine Learning*) han tenido un gran impulso. El continuo desarrollo de esta tecnología motivó que el BSI, la oficina federal alemana de seguridad de la información, publicase en 2024 una guía para evaluar la resistencia de los criptosistemas a los ataques por canal lateral utilizando machine learning [1].

En los últimos años, la evolución de los ataques ha llevado a la utilización de técnicas de aprendizaje profundo (*deep learning*) [2], [3], [4], empleando diversos métodos (como redes neuronales convolucionales, *autoencoders*, redes neuronales recurrentes, etc.) para analizar la información que puede ser obtenida a través de los canales laterales. En esta comunicación se describirán los fundamentos de los ataques por canal lateral utilizando *deep learning*, así como los últimos avances en el campo.

Referencias

- [1] BSI, German Federal Office for Information Security (2024) *Guidelines for Evaluating Machine-Learning based Side-Channel Attack Resistance. Part of AIS 46*.
https://www.bsi.bund.de/SharedDocs/Downloads/DE/BSI/Zertifizierung/Interpretationen/AIS_46_AI_guide.pdf.
- [2] H. Maghrebi, T. Portigliatti, and E. Prouff (2016), Breaking cryptographic implementations using deep learning techniques, in C. Carlet et al., editores, *Security, Privacy, and Applied Cryptography Engineering* Lect. Notes in Comput. Sci., vol. 10076. Springer, 3–26.
- [3] S. Picek, G. Perin, L. Mariot, L. Wu, L. Batina (2023). SoK: Deep Learning-based Physical Side-channel Analysis. *ACM Comput. Surv.*, 55, 11, Article 227, 1–35.
- [4] S. Karayalçın, M. Krček, S. Picek (2025). A Practical Tutorial on Deep Learning-based Side-channel Analysis. *Cryptology ePrint Archive, Paper 2025/471*, 1–17.

Agradecimientos. Trabajo parcialmente financiado por el CSIC, a través del proyecto *Seguridad Algebraica y Aplicaciones de la Inteligencia Artificial en la Criptología Actual y Postcuántica* (SAIACAP), Nº. Ref.: 202450E017.

Cyclotomic Mappings and Plateau Functions: Exploring Generalizations of APN Structures in Finite Fields

Domingo Gómez-Pérez, Ana I. Gómez

Departamento MATESCO, Universidad de Cantabria

gomezd@unican.es

Cyclotomic mappings, rooted in the partitioning of finite fields into multiplicative cosets, provide a powerful framework for constructing and analyzing nonlinear functions with desirable cryptographic properties. In this talk, we investigate the algebraic and combinatorial properties of cyclotomic mappings, with a focus on their role in generating plateau functions—functions whose Walsh spectra take on a small number of values. These functions generalize the concept of Almost Perfect Nonlinear (APN) functions, which are optimal against differential attacks in even characteristic fields. We explore how cyclotomic structures can be leveraged to construct new classes of plateau and generalized APN functions, analyze their spectral and differential properties, and discuss their implications in cryptography and coding theory. The talk will highlight recent advances, open problems, and the interplay between algebraic structure and cryptographic strength.

References

- [1] Y. Li, H. Kan, S. Mesnager, J. Peng, L. Zheng (2024). Direct Approaches for Generic Constructions of Plateaued Functions and Bent Functions Outside M . *IEEE Trans. Inf. Theory*.
- [2] X. Xie, N. Li, Q. Wang, X. Zeng (2024). On constructing bent functions from cyclotomic mappings. *IEEE Trans. Inf. Theory*.
- [3] C. Carlet (2025). On the vector subspaces of $\mathbb{F}_{2^n}$ over which the multiplicative inverse function sums to zero. *Des. Codes Cryptogr.*, 93(4), 1237–1254.

Acknowledgments. This result is part of the project CÁTEDRA UNIVERSIDAD DE CANTABRIA-INCIBE DE NUEVOS RETOS EN CIBERSEGURIDAD, financed by European Union NextGeneration-EU, the Recovery Plan, Transformation and Resilience, through INCIBE.

El diseño de cifrados en flujo en el entorno no binario

Slobodan Petrović

Norwegian University of Science and Technology (NTNU)

`slobodan.petrović@ntnu.no`

El desarrollo de los circuitos no-binarios ha hecho posible la realización en la práctica de varios algoritmos complejos de cifrado con menos transistores y el consumo reducido de energía. Eso es muy importante en algunos entornos, típicamente en el entorno IoT. En esta charla nos enfocamos en la generalización de varios teoremas conocidos que valen en los cuerpos finitos de característica 2 y sus aplicaciones en el diseño de cifrados en flujo que generan secuencias pseudoaleatorias no binarias. Estos cifrados tienen algunas ventajas teóricas sobre los cifrados binarios. Por ejemplo, es más fácil alcanzar las propiedades de resistencia contra los ataques por correlación en los cuerpos con las características mayores que 3. Explicamos cómo se generan los polinomios adecuados de realimentación de los registros de desplazamiento realimentados linealmente (LFSR) y cómo se encuentran las funciones Booleanas no-lineales y equilibradas para combinar de una manera no-lineal las secuencias de salida de varios LFSRs no binarios. Al final se consideran algunas medidas de complejidad de las secuencias pseudoaleatorias no binarias.

Referencias

- [1] Potapov V.N. (2020). On q -ary bent and plateaued functions. *Designs, Codes, and Cryptography*, 88, 2037–2049.
- [2] Bos S. (2024) *Beyond 0 and 1: A mixed radix design and verification workflow for modern ternary computers*. PhD thesis, University of South-Eastern Norway, Kongsberg.
- [3] Stanković R., Astola J., Moraga C. (2022) *Representation of multiple-valued logic functions*. Springer Nature, Switzerland.

Propuesta de Algoritmo de Cifrado de Imágenes Usando Caos y Autómatas Celulares

Ander Chueca Rodríguez, Adriana Suárez Corona

Departamento de Matemáticas, Universidad de León

achur@unileon.es

El crecimiento exponencial en la generación, transmisión y almacenamiento de imágenes digitales ha convertido la protección de información visual en un área relevante dentro de la ciberseguridad. A diferencia de otros tipos de datos, como el texto o los datos binarios, los gráficos presentan altas tasas de correlación entre píxeles adyacentes, valores redundantes y, cada vez, un mayor tamaño. Estas propiedades reducen la efectividad de cifrados clásicos como AES y limitan su uso en dispositivos de poca potencia.

Los modelos caóticos, caracterizados por su alta sensibilidad a las condiciones iniciales y su capacidad para generar secuencias aparentemente aleatorias, son una alternativa para el cifrado de imágenes. Este trabajo presenta un algoritmo de cifrado basado en la combinación de un modelo caótico y autómatas celulares, centrado en la eficiencia y la paralelización, para mejorar la seguridad en dispositivos con limitaciones de potencia, como cámaras de vigilancia.

Referencias

- [1] Zia, U., McCartney, M., Scotney, B., Martinez, J., AbuTair, M., Memon, J., Sajjad, A. (2022). Survey on image encryption techniques using chaotic maps in spatial, transform and spatio-temporal domains. *International Journal of Information Security*, 21(4), 917-935.
- [2] Kocarev, L., Lian, S. (Eds.). (2011). *Chaos-based cryptography: Theory, algorithms and applications* (Vol. 354). Springer Science & Business Media.

Agradecimientos. Trabajo parcialmente financiado por el proyecto de investigación PID2021-123461NB-C22, del MCINN.

Nonlinear Approximations in Linear Cryptanalysis using Hadamard Matrices

José Andrés Armario

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

armario@us.es

The aim of this talk is to show a link between linear cryptanalysis and some types of nonlinear approximations [1]. The novelty of our approach relies on the use of Hadamard matrices to construct these nonlinear approximations. Focusing on Ascon's 5-bit S-box (see [2]), we will make some comments on our ongoing work.

References

- [1] C. Beierle, A. Canteaut, G. Leander (2018). Nonlinear Approximations in Cryptanalysis Revisited. *IACR Transactions on Symmetric Cryptology*, 4, 80–101.
- [2] C. Dobraunig, M. Eichlseder, F. Mendel, M. Schlaffer (2021). Ascon v1.2: Lightweight Authenticated Encryption and Hashing, *Journal of Cryptology*, 34, n. 3, 33.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Delfín Santana Rubio. Proyecto parcialmente financiado por FQM016 (JJAA).

Exceptional cliques of integer matrices and applications to secret sharing and zero-knowledge proofs

Ignacio Cascudo

IMDEA Software Institute

ignacio.cascudo@imdea.org

Given a ring R , a subset $S \subset R$ is exceptional if $x - y$ is invertible in R for every $x, y \in S$ with $x \neq y$. Recent applications to black-box secret sharing [1, 2, 3, 4] and zero-knowledge proofs for hidden order groups [4] have motivated the following question: *given $n > 0$, what is the size of the largest exceptional subset S of the ring of $n \times n$ matrices over the integers $R = \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$?* For non-commutative rings like these, this question is very little explored, as opposed to the case of commutative rings, where H. Lenstra [5], already in 1976, introduced this concept in the context of rings of integers of algebraic number fields, in a celebrated result with important consequences to study which of these fields are Euclidean. In this talk, some of the recent results that the speaker has obtained together with other authors will be presented, and the aforementioned applications to cryptography will be explained.

References

- [1] Y. Desmedt and Y. Frankel (1994). Perfect homomorphic zero-knowledge threshold schemes over any finite abelian group. *SIAM J. Discret. Math.*, 7(4), 667–679.
- [2] R. Cramer, S. Fehr (2002). Optimal black-box secret sharing over arbitrary abelian groups. *Advances in Cryptology - CRYPTO 2002, 22nd Annual International Cryptology Conference, Santa Barbara, California, USA, August 18-22, 2002, Proceedings*, Lect. Notes Comput. Sci., vol. 2442, Springer-Verlag, 272–287.
- [3] R. Cramer, S. Fehr, and M. Stam (2005). Black-box secret sharing from primitive sets in algebraic number fields. *Advances in Cryptology - CRYPTO 2005: 25th Annual International Cryptology Conference, Santa Barbara, California, USA, August 14-18, 2005, Proceedings*, Lect. Notes Comput. Sci., vol. 3621, Springer-Verlag, 344–360.
- [4] C. Bartoli, I. Cascudo (2024). On sigma-protocols and (packed) black-box secret sharing schemes. *Public-Key Cryptography - PKC 2024 - 27th IACR International Conference on Practice and Theory of Public-Key Cryptography, Sydney, NSW, Australia, April 15-17, 2024, Proceedings, Part II*, Lect. Notes Comput. Sci., vol. 14602, Springer-Verlag, 426–457.
- [5] H. W. Lenstra Jr. (1976) Euclidean number fields of large degree. *Inventiones mathematicae*, 38, 1432–1297, 1976.

Acknowledgments. Based on joint works with Claudia Bartoli, and with Milan Boutros, Ronald Cramer and Daniel van Gent.

Construcciones criptográficas basadas en grupos lineales de matrices

Irene Urrutia Calvo, María Isabel González Vasco

Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid

urrutiocalvoirene@gmail.com

Con la aparición de la computación cuántica, los esquemas criptográficos convencionales se han visto amenazados, lo que ha impulsado la búsqueda de nuevas herramientas matemáticas. Entre ellas, las construcciones basadas en teoría de grupos han surgido como alternativas prometedoras. En esta charla nos centramos en construcciones criptográficas que emplean grupos lineales de matrices, como $SL_n(\mathbb{F}_p)$. En particular en funciones hash de Cayley definidas sobre dichos grupos. Este enfoque tiene sus orígenes en la propuesta de Tillich y Zémor (1994) [1], que ha dado lugar a un área activa de investigación que combina álgebra, teoría de grafos y criptografía. El objetivo principal de esta charla es analizar la seguridad de dos propuestas recientes basadas en la función hash de Tillich y Zémor: la propuesta por Le Coz et al. [3] y la de Shpilrain y Sosnovski [2]. Concretamente, estudiaremos su resistencia frente a ataques basados en la longitud, una clase de ataques probabilísticos originalmente desarrollados en grupos de trenzas y adaptados aquí al contexto de grupos de matrices.

Referencias

- [1] J. P. Tillich, G. Zémor (1994). Hashing with SL_2 . *Advances in cryptography, Eurocrypt 1994*, 40–49.
- [2] V. Shpilrain, B. Sosnovski (2025). Cayley Hashing with Cookies. *Advances in Information and Communication*, 706–718.
- [3] C. Le Coz, C. Battarbee, Ramón Flores, T. Koberda, D. Kahrobaei (2024). Post-quantum hash functions using $SL_n(\mathbb{F}_p)$. *Advances in Mathematics of Communications*, 19(3), 996–1009.

Agradecimientos. Este trabajo está financiado por el proyecto Vital-IoT de INCIBE. Se realiza en el marco de los fondos del Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia, financiadas por la Unión Europea (Next Generation), el proyecto del Gobierno de España que traza la hoja de ruta para la modernización de la economía española, la recuperación del crecimiento económico y la creación de empleo, para la reconstrucción económica sólida, inclusiva y resiliente tras la crisis de la COVID19, y para responder a los retos de la próxima década.

Using mutually orthogonal local permutation polynomials in image symmetric encryption

Raúl M. Falcón, Jaime Gutiérrez, Jorge Jiménez Urroz

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

rafalgalan@us.es

Permutation polynomials (PPs) over finite fields have many applications in Cryptography, with particular relevance in the symmetric-key algorithm described by the Advanced Encryption Standard. This talk focuses on local permutation polynomials (LPPs) [5], which constitute a natural generalization of PPs to several variables. More specifically, an LPP in the polynomial ring $\mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$, with q a prime power, is a polynomial $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$ such that $f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ is a permutation polynomial in $\mathbb{F}_q[x_k]$ for all $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n \in \mathbb{F}_q$, and every $k \leq n$. Every LPP is equivalent to a Latin hypercube, so that there is a natural translation of notions and results between both theories. This fact has particular relevance in Cryptography, because Latin hypercubes are used to design error-correcting codes, cryptographic primitives, pseudorandom sequences or image encryption algorithm, among others. Despite this, and unlike PPs, there are very few papers in the literature dealing with LPPs [2, 3, 4]. This talk delves into this topic by showing how the superposition operator described by the so-called Hadamard multiary quasigroup product [1] can be used to construct mutually orthogonal LPPs. As an illustrative example, we show how this construction may be used in symmetric image encryption.

References

- [1] R. M. Falcón, L. Mella, P. Vojtechovský (2025). The Hadamard multiary quasigroup product. *Banach Center Publications*, 129, 85–101.
- [2] J. Gutiérrez, J. Jiménez Urroz (2023). Local permutation polynomials and the action of e-Klenian groups. *Finite Fields Their Appl.*, 91, paper 102261, 22 pp.
- [3] J. Gutiérrez, J. Jiménez Urroz (2025). Local permutation polynomials of maximum degree over prime finite fields. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 48, paper 40, 10 pp.
- [4] J. Gutiérrez, J. Jiménez Urroz (2025). Permutation and local permutation polynomials of maximum degree. *Afr. Mat.*, 36, paper 45, 11 pp.
- [5] G. L. Mullen (1980). Local permutation polynomials over $\mathbb{Z}_p$. *Fibonacci Q.* 18, 104–108.

Acknowledgments. This research is partially supported by the Research and Innovation Project PPIT-FEDER 2023 “Modeling small-world, scale-free networks from combinatorial designs based on quasigroup digraphs”, co-financed by the EU - Ministry of Finance and Public Administration - European Funds - Andalusian Regional Government - Ministry of University, Research and Innovation.

Fast Polynomial Arithmetic in Homomorphic Encryption with Cyclo-Multiquadratic Fields and maximal totally real cyclotomic subFields

Iván Blanco Chacón

Universidad de Alcalá

`ivan.blancoc@uah.es`

In this talk we will discuss the advantages and limitations of cyclotomic fields to have fast polynomial arithmetic within homomorphic encryption, and show how these limitations can be overcome by replacing cyclotomic fields by maximal totally real cyclotomic subfields and cyclomultiquadratic fields. This family is of particular interest due to its arithmetic efficiency properties and to the fact that the Polynomial Learning with Errors (PLWE) and Ring Learning with Errors (RLWE) problems are equivalent for it. We will also provide exact expressions for the condition number for any cyclotomic field, but under what we call the twisted power basis and will show that for this family, swapping between NTT (Number Theoretic Transform) and coefficient representations can be achieved at least twice faster than for the usual cyclotomic family. This talk is based on the recently published works [1] and [2].

References

- [1] Blanco-Chacón, I., Pedrouzo-Ulloa, A., Njah Nchiwo, R.Y. et al. Fast polynomial arithmetic in homomorphic encryption with cyclo-multiquadratic fields. *Cryptogr. Commun.* (2025). <https://doi.org/10.1007/s12095-024-00771-6>
- [2] Ahola, J., Blanco-Chacón, I., Bolaños, W. et al. Fast multiplication and the PLWE–RLWE equivalence for an infinite family of maximal real subfields of cyclotomic fields. *Des. Codes Cryptogr.* (2025). <https://doi.org/10.1007/s10623-025-01601-3>

Ataques a instancias PLWE totalmente factorizables vía isomorfismos explícitos

Rodrigo Martín Sánchez-Ledesma, Raúl Durán Díaz

Departamento de Álgebra, Universidad Complutense de Madrid, España,
Indra Sistemas de Comunicaciones Seguras, España

rodrma01@ucm.es

En esta charla avanzamos algunos resultados concernientes a la generalización de ataques al problema PLWE (Polynomial Learning With Errors) que ofrecimos provisionalmente en [1]. En dichos ataques se usa el conocimiento de una raíz del polinomio generador del anillo de polinomios sobre cierto cuerpo base (finito) para obtener algoritmos que pueden resolver bajo ciertas condiciones el problema PLWE en su variante decisonal.

Ahora el objetivo que nos proponemos es extender esos ataques por medio de la construcción de morfismos partiendo de instancias vulnerables a los ataques anteriormente descritos. Los primeros resultados indican que si el polinomio generador es totalmente factorizable sobre el cuerpo base no es posible encontrar nuevas vulnerabilidades.

Para demostrarlo la idea clave es construir isomorfismos explícitos entre polinomios totalmente factorizables y mostrar que tales isomorfismos siempre distorsionan las muestras en tal manera que las muestras transformadas no pueden ser utilizadas como una ventaja para el ataque decisonal. Dicho con otras palabras, no permiten distinguir si tales muestras proceden de una distribución de tipo PLWE o bien de una distribución puramente uniforme, de modo que el ataque resulta ineficaz.

Referencias

- [1] I. Blanco Chacón, R. Durán Díaz, R. Martín Sánchez-Ledesma, *A Generalized Approach to Root-based Attacks against PLWE*, arXiv (2024). [arXiv:2410.01017](https://arxiv.org/abs/2410.01017), [doi:10.48550/arXiv.2410.01017](https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.01017).

A computational approach to the Regev Quantum Factorization Algorithm

Antonio Falcó, Daniela Falcó-Pomares

Departamento de Matemáticas, Física y Ciencias Tecnológicas, Universidad CEU Cardenal Herrera

afalco@uchceu.es

This talk focuses on the cryptographic implications of the Regev Quantum Factorization Algorithm, analyzing its computational complexity and potential to challenge current cryptosystems. Regev's method [4] provides an alternative to Shor's algorithm [1], reducing quantum circuit complexity to $\tilde{O}(n^{3/2})$ gates per subroutine call, balanced by $O(\sqrt{n})$ independent quantum runs and efficient classical post-processing based on lattice reduction. We interpret this structure within probabilistic proof systems, where quantum samples act as probabilistic certificates revealing hidden periodicities in lattice structures associated with integer factorization. We discuss how the algorithm could impact the hardness assumptions underlying RSA and lattice-based cryptography, particularly if combined with classical breakthroughs in lattice problem algorithms. In particular, recent extensions by Pilatte [2] and improvements in space complexity by Ragavan and Vaikuntanathan [3] could further influence the practicality of such quantum attacks. Furthermore, we examine conditions where Regev's approach may offer advantages in the NISQ regime or in hybrid quantum-classical cryptanalytic settings, and highlight open questions regarding the long-term security of post-quantum cryptosystems.

References

- [1] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th Anniversary Edition, Cambridge University Press, 2010.
- [2] C. Pilatte, Unconditional correctness of recent quantum algorithms for factoring and computing discrete logarithms, arXiv:2404.16450v1 [math.NT] 25 Apr 2024.
- [3] S. Ragavan and V. Vaikuntanathan, Space-Efficient and Noise-Robust Quantum Factoring, arXiv:2310.00899v5 [quant-ph] 30 Apr 2025.
- [4] O. Regev, An Efficient Quantum Factoring Algorithm, Journal of the ACM, 2024. <https://doi.org/10.1145/3708471>.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por Generalitat Valenciana COMCUANTICA/007.

Sesión especial 23

Matemáticas en la Sociedad de la Información: Teoría de Códigos

Equipo organizador:

- *Miguel Beltrá Vidal* (Universidad de Alicante)
- *Helena Martín Cruz* (Universidad de Jaén)
- *Víctor Manuel Ortiz Sotomayor* (Universidad de Granada)
- *Verónica Requena Arévalo* (Universidad de Alicante)

Descripción

La teoría de códigos es una rama fundamental de las matemáticas y la teoría de la información dedicada al estudio de métodos para detectar y corregir errores en la transmisión y almacenamiento de datos. Esta disciplina surgió del trabajo de Claude Shannon en 1948. El desarrollo y análisis de códigos correctores de errores se apoya en multitud de ramas de las matemáticas: el álgebra lineal sobre cuerpos finitos nos da un marco teórico para construir y caracterizar la familia más importante de códigos: los códigos lineales. Todas las operaciones de codificación y decodificación se modelan mediante matrices y vectores. La teoría de ideales de anillos de polinomios es crucial en la construcción de códigos cíclicos y algebraicos como los códigos Reed-Solomon. La teoría de grafos es la base del diseño y análisis de los códigos LDPC y los códigos turbo. La combinatoria es fundamental a la hora de analizar propiedades como la distancia mínima del código, que determina la capacidad de detección y corrección de errores. Y también son esenciales la probabilidad y la estadística.

Palabras clave: Teoría de la Información (94A15); Códigos Lineales (94B05); Códigos Convolutivos (94B10); Cuerpos Finitos (12E20).

Programa

LUNES, 19 de enero

- 15:30 – 16:00 Noemí DeCastro-García (Universidad de León)
Descubrimiento automatizado en Códigos Convolucionales mediante Sistemas Dinámicos Lineales. Un estudio exploratorio.
- 16:00 – 16:30 Cristina Fernández-Córdoba (Universidad Autónoma de Barcelona)
MacWilliams Relations for Weight Enumerators Given by Equivalence Relations
- 16:30 – 17:00 Fernando Hernando (Universidad Jaume I)
New Quantum Codes From Homothetic-BCH Codes
- 17:00 – 17:30 Mercè Villanueva (Universitat Autònoma de Barcelona)
Hamming and homogeneous weight distributions of linear simplex and MacDonald codes over $\mathbb{Z}_{p^s}$

MARTES, 20 de enero

- 11:00 – 11:30 Juan Jacobo Simón (Universidad de Murcia)
Conjuntos de definición en códigos abelianos y sus aplicaciones
- 11:30 – 12:00 Ignacio Fernández Rúa (Universidad de Oviedo)
Cíclicidad de algunos códigos grupo
- 12:00 – 12:30 José Ignacio Iglesias Curto (Universidad de Salamanca)
Códigos Convolucionales Reversos
- 15:30 – 16:00 Diego Napp (Universidad de Alicante)
A novel rank metric code-based public key cryptosystem
- 16:00 – 16:30 José Joaquín Bernal (Universidad de Murcia)
Decodificación por permutación: de códigos cíclicos a códigos afín-invariantes
- 16:30 – 17:00 Diego Ruano (Universidad de Valladolid)
The Schur product of evaluation codes and its application to CSS-T quantum codes and private information retrieval

Descubrimiento automatizado en Códigos Convolucionales mediante Sistemas Dinámicos Lineales. Un estudio exploratorio

Noemí DeCastro-García, Ángel Luis Muñoz Castañeda, David Escudero García

Departamento de Matemáticas, Research Institute of Applied Sciences in Cybersecurity,
Universidad de León

ncasg@unileon.es

Un código convolucional C se puede definir como un submódulo finito de $\mathbb{F}[z]^n$, donde $\mathbb{F}$ es un cuerpo finito, n es el número de símbolos de salida, y k es el número de símbolos de entrada. Los códigos convolucionales son una clase de códigos de detección y corrección de errores que desempeñan un papel clave en garantizar la transmisión fiable de datos, tanto sobre canales ruidosos, como de borrado. Además, han mostrado gran potencial de uso en el criptosistema de McEliece.

Uno de los enfoques más conocidos para diseñar códigos convolucionales con características óptimas de rendimiento (observabilidad, decodificación y distancia) es a través de otros objetos matemáticos, las representaciones I/S/O (*Input/State/Output*). Estas representaciones asocian el código convolucional (codificador) con sistemas dinámicos lineales. La representación I/S/O se describe como:

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= A \cdot x_t + B \cdot u_t \\ y_t &= C \cdot x_t + D \cdot u_t,\end{aligned}$$

donde $x_t \in F^\delta$ es el vector de estado, $u_t \in F^k$ es el vector de entrada, y $y_t \in F^{n-k}$ representa el vector de salida. El conjunto de matrices $\Sigma = (A, B, C, D) \in F^{\delta \times \delta} \times F^{\delta \times k} \times F^{(n-k) \times \delta} \times F^{(n-k) \times k}$ forma la representación I/S/O del código convolucional.

En este trabajo presentamos los primeros avances de aplicar *Descubrimiento Automatizado de Conocimiento* a este campo [2, 3]. Al incorporar inteligencia artificial y aprendizaje automático a una base de datos que incorpora información sobre esta relación entre códigos convolucionales y las representaciones I/S/O, queremos generar hipótesis en el estudio de las condiciones que deben verificar las matrices que forman Σ (sistema accesible, observable, output observable y superregularidad, [1]) para obtener representaciones I/S/O que generen códigos convolucionales observables y con buenas propiedades de decodificación y de distancia.

Referencias

- [1] N. DeCastro-García, A. L. Muñoz Castañeda y M. V. Carriegos (2025), Construction of observable and MDP convolutional codes with good decodable properties by I/S/O representations. Enviado a *International journal of Applied Mathematics and Computer Science*.
- [2] R. Akhavan, y A. H. Behzadan (2013). Automated knowledge discovery and data-driven simulation model generation of construction operations en *Proceedings of the 2013 Winter Simulation Conference*, 3026–3037
- [3] S. Gukov, J. Halverson, y F. Ruehle (2024). Rigor with machine learning from field theory to the Poincaré conjecture. *Nature Reviews Physics*, 6, 310–319.

Agradecimientos. Esta investigación resulta del Proyecto Estratégico *Ciencia de datos para un modelo de inteligencia artificial en ciberseguridad* (C073/23), fruto del convenio de colaboración suscrito entre el Instituto Nacional de Ciberseguridad (INCIBE) y la Universidad de León. Esta iniciativa se realiza en el marco de los fondos del Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia, financiados por la Unión Europea (Next Generation).

MacWilliams Relations for Weight Enumerators Given by Equivalence Relations

Cristina Fernández-Córdoba, Steven T. Dougherty

Departamento de Ingeniería de la Información y de las Comunicaciones,
Universidad Autónoma de Barcelona

`cristina.fernandez@uab.cat`

In this work, we consider codes over finite fields, finite abelian groups and finite Frobenius rings. For such codes, the complete weight enumerator and the Hamming weight enumerator serve as powerful tools. These two types of weight enumerator satisfy the MacWilliams relations. We define the weight enumerator of a code with respect to various equivalence relations and prove that the MacWilliams relations hold for these weight enumerators. We show some examples by considering different equivalence relations.

References

- [1] S. T. Dougherty (2017). *Algebraic Coding Theory over Finite Commutative Rings*. Springer Briefs in Mathematics. Springer.
- [2] S. T. Dougherty (2024). Dualities for Codes over Finite Abelian Groups. *Advance in Mathematics of Communication*, 18, no. 6, 1827–1841.
- [3] F. J. MacWilliams (1963). A theorem on the distribution of weights in a systematic code. *Bell System Tech. Journal*, 42, 79–94.
- [4] J. Wood (1999). Duality for modules over finite rings and applications to coding theory. *Amer. J. Math.*, 121, no. 3, 555– 575.

Acknowledgments. This work has been partially supported by the Spanish MCIN under Grant PID2022-137924NB-I00 (AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE)

New Quantum Codes From Homothetic-BCH Codes

F. Hernando, C. Galindo, H. Martín-Cruz

IMAC, Departamento Matemáticas, Universidad Jaume I

`carrillf@uji.es`

We introduce homothetic-BCH codes [1]. These are a family of q^2 -ary classical codes $\mathcal{C}$ of length λn_1 , where λ and n_1 are suitable positive integers such that the punctured code $\mathcal{B}$ of $\mathcal{C}$ in the last $\lambda n_1 - n_1$ coordinates is a narrow-sense BCH code of length n_1 . We prove that whenever $\mathcal{B}$ is Hermitian self-orthogonal, so is $\mathcal{C}$.

As a consequence, we present a procedure to obtain quantum stabilizer codes with lengths than cannot be reached by BCH codes. With this procedure we get new quantum codes according to Grassl's table [2].

To prove our results, we give necessary and sufficient conditions for Hermitian self-orthogonality of BCH codes of a wide range of lengths.

References

- [1] C. Galindo, F. Hernando, H. Martín-Cruz, *New quantum codes from homothetic-BCH codes*. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2503.13069>, 2025.
- [2] M. Grassl, *Bounds on the minimum distance of linear codes*. Available online at: <http://www.codetables.de>, 2007.

Acknowledgments. This work has been partially supported by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by the “European Union NextGenerationEU/PRTR”, grant PID2022-138906NB-C22, as well as by Universitat Jaume I, grants GACUJIMA/2024/03 and PREDOC/2020/39.

Hamming and homogeneous weight distributions of linear simplex and MacDonald codes over $\mathbb{Z}_{p^s}$

Mercè Villanueva, Cristina Fernandez-Córdoba, Sergi Sánchez-Aragón

Departament d'Enginyeria de la Informació i de les Comunicacions,
Universitat Autònoma de Barcelona

merce.villanueva@uab.cat

The $\mathbb{Z}_{p^s}$ -additive codes are subgroups of $\mathbb{Z}_{p^s}^n$ with p prime and $s \geq 1$, and can be seen as a generalization of linear codes over $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4$, and $\mathbb{Z}_{2^s}$ studied extensively, such as in [2, 3, 4]. A $\mathbb{Z}_{p^s}$ -linear code is a code over $\mathbb{Z}_p$ (not necessarily linear) which is the Gray map image of a $\mathbb{Z}_{p^s}$ -additive code. We give the construction of $\mathbb{Z}_{p^s}$ -linear simplex and MacDonald codes of type α and β , as a generalization of the $\mathbb{Z}_{2^s}$ -linear simplex and MacDonald codes constructed and studied in [2, 3]. In this work, we show the fundamental parameters of these codes, as well as their complete weight distributions for the Hamming and homogeneous weights. Moreover, we show that these codes are related to the $\mathbb{Z}_{p^s}$ -linear generalized Hadamard codes, studied in [1].

References

- [1] D. K. Bhunia, C. Fernández-Córdoba, and M. Villanueva. On the linearity and classification of $\mathbb{Z}_{p^s}$ -linear generalized Hadamard codes. *Des. Codes Cryptogr.*, 90(4):1037–1058, 2022.
- [2] C. Fernández-Córdoba, C. Vela, and M. Villanueva. Nonlinearity and kernel of $\mathbb{Z}_{2^s}$ -linear simplex and MacDonald codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 68(11):7174–7183, 2022.
- [3] M. K. Gupta. On linear codes over $\mathbb{Z}_{2^s}$. *Designs, Codes and Cryptography*, 36:227–244, 2005.
- [4] A. R. Hammons Jr., P. V. Kumar, A. R. Calderbank, N. J. A. Sloane, and P. Solé. The $\mathbb{Z}_4$ -linearity of Kerdock, Preparata, Goethals, and related codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 40(2):301–319, 1994.

Acknowledgments. This work has been partially supported by the Spanish MCIN under Grant PID2022-137924NB-I00 (AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE), and by the Catalan AGAUR under grant 2021 SGR 00643.

Conjuntos de definición en códigos abelianos y sus aplicaciones

Juan Jacobo Simón

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

`jsimon@um.es`

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo finito, y denotamos $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ el anillo de polinomios en las indeterminadas $X_1 \dots X_n$. Un código abeliano puede ser visto como un ideal del anillo cociente $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]/\langle X_1^{r_1}, \dots, X_n^{r_n} \rangle$. En este marco de trabajo, se construye el conjunto de definición de un código abeliano, que es cierto subconjunto de $\mathbb{Z}_{r_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{r_n}$.

En esta charla vamos a repasar la relación que existe entre los códigos abelianos y estos subconjuntos de $\mathbb{Z}_{r_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{r_n}$. La relación abarca, a través de fórmulas simples y explícitas, entre otras,

1. La propia construcción del código a través de una relación biunívoca.
2. El cálculo de la dimensión.
3. Construcción de conjuntos de información.
4. Cotas a la distancia mínima.
5. Descodificación por síndrome.

Los resultados que presentaremos están publicados en los trabajos de las referencias.

Referencias

- [1] J. J. Bernal, J. J. Simón (2011). Information sets from defining sets in abelian codes *Trans. IEEE*, 57, 7990-7999.
- [2] J. J. Bernal, M. Guerreiro, J. J. Simón (2018). From ds-bounds for cyclic codes to true minimum distance for abelian codes *Trans. IEEE*, 19, 912-932.
- [3] J. J. Bernal, J. J. Simón (2021). A new approach to the Berlekamp-Massey-Sakata Algorithm. Improving Locator Decoding. *Trans. IEEE*, 67, 268-281.
- [4] J. J. Bernal, J. J. Simón (2024). A Note on the Theoretical Support to Compute Dimension in Abelian Codes, *2024 International Symposium on Information Theory and Its Applications (ISITA2024)*, IEEE, 384-388.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con José Joaquín Bernal. Proyecto parcialmente financiado por PID2020-113206GBIO0 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y Fundación Séneca: 2004/PI/22.

Ciclicidad de algunos códigos grupo

Ignacio Fernández Rúa, Alejandro Piñera-Nicolás, Fabián Ricardo Molina Gómez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo

rua@uniovi.es

Un código grupo es un ideal (a izquierda, derecha o bilátero) del álgebra de grupo $\mathbb{F}_q G$, donde $\mathbb{F}_q$ es el cuerpo de Galois de q elementos y G es un grupo finito de orden n . El ejemplo más conocido y estudiado de código grupo es el de un código cíclico, que aparece cuando se toma como G el grupo cíclico C_n . No todo código lineal de longitud n sobre el alfabeto $\mathbb{F}_q$ es necesariamente un código grupo, es decir, no todo código puede realizarse como un ideal de $\mathbb{F}_q G$ a través de la identificación de sus palabras $(c_1, \dots, c_n)$ con elementos $\sum_{i=1}^n g_i$, para algún grupo $G = \{g_1, \dots, g_n\}$. Por ejemplo, el código de longitud 2 sobre $\mathbb{F}_5$ y dimensión 1 dado por las tuplas múltiplo de $(1, 3)$.

En el trabajo [1] se recoge una caracterización intrínseca de un código grupo, esto es, una condición necesaria y suficiente para que un código lineal se pueda realizar como un ideal de un álgebra de grupo, en términos de su grupo de automorfismos, lo que proporciona una solución intrínseca a la pregunta: ¿cuándo un código lineal es un código cíclico?

En esta charla presentaremos algunos resultados en relación a una solución explícita a este problema (que no pase por el estudio del grupo de automorfismos del código), para ciertos códigos diédricos, esto es, aquellos que son ideales del álgebra de grupo $\mathbb{F}_q D_n$, donde D_n es el grupo diédrico de grado n y orden $2n$.

Referencias

- [1] J. J. Bernal, A. del Río, and J. J. Simón (2009). An intrinsical description of group codes. *Des. Codes Cryptogr.*, 51(3), 289–300.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por el Proyecto de Generación de Conocimiento PID2021-123461NB-C22, y por el Ministerio de Asuntos Económicos y Transformación Digital a través del Insituto Nacional de Ciberseguridad (Proyecto Estratégico MRR-MAETD-24-INCIBE-001), en el ámbito del Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia de la Unión Europea (NextGenerationEU), dentro de la Agenda Digital 2026. Los tres autores son miembros del equipo de investigación GACYC de la Universidad de Oviedo, y son apoyados por la Red Española de Matemáticas en la Sociedad de la Información (MatSI).

Códigos Convolucionales Reversos

José Ignacio Iglesias Curto

Departamento de Matemáticas - IUFFyM, Universidad Salamanca

joseig@usal.es

Massey [2] introdujo la idea de reverso de un polinomio, o de un vector polinómico, en el contexto de la teoría de códigos. Posteriormente Hutchinson [1] demostró que el conjunto de reversos de las palabras de un código convolucional es también un código convolucional y V. Tomás et al [3] utilizaron sus propiedades para la decodificación del código original. Estos trabajos pusieron de manifiesto no sólo que el reverso de un código convolucional es una vía de obtención de códigos a partir de otros conocidos, sino que sus propiedades están fuertemente ligadas a las del código de partida.

El objetivo de este trabajo es estudiar estas relaciones para profundizar en el conocimiento de las características tanto del código original como de su reverso y para determinar si es posible, y en qué condiciones, obtener códigos reversos con mejores propiedades que las del original.

Referencias

- [1] R. Hutchinson (2009). The existence of strongly MDS convolutional codes, *SIAM journal on Control and Optimization*, 47, 6, 2812–2826.
- [2] J. L. Massey (1964). Reversible codes. *Inf. Control*, 7, 3, 369–380.
- [3] V. Tomás, J. Rosenthal, R. Smarandache (2012). Decoding of convolutional codes over the erasure channel. *IEEE Transactions on Information Theory*, 58, 1, 90–108.

A novel rank metric code-based public key cryptosystem

Diego Napp

University of Alicante

diego.napp@ua.es

In this talk we present and analyse ConGabi, a novel rank metric code-based public key cryptosystem (PKC). The acronym stands for Convolutional and Gabidulin. In contrast to classical McEliece cryptosystems, where block codes are used, we propose a convolutional encoder to be part of the public key. The masking constant matrices typically used in the McEliece PKC are substituted by two polynomial matrices in such a way that allows to securely include Gabidulin codes as secret codes. The security of our system relies on the hardness of the problem of decoding random families of quasi-cyclic codes for the rank metric with non-homogeneous errors and on the problem of indistinguishability of Gabidulin codes multiplied by a homogeneous matrix of given rank. The scheme benefits from a deterministic decryption algorithm together with interesting key and ciphertext sizes. For example, to achieve 192-bits security the sum of public key and ciphertext is 1.87 KB.

Agradecimientos. This work is partially supported by the Conselleria de Innovación, Universidades, Ciencia y Sociedad Digital (Grant No. CIAICO/2022/167) and by the Spanish Ministerio de Ciencia e Innovación via the grant with ref. PID2022-142159OB-I00.

Decodificación por permutación: de códigos cíclicos a códigos afín-invariantes

José Joaquín Bernal

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

josejoaquin.bernal@um.es

El algoritmo de decodificación por permutación fue introducido por F. J. MacWilliams en 1964 como un algoritmo de decodificación especialmente útil para códigos cíclicos. Este algoritmo tomaba ventaja del hecho de que cualquier conjunto de k posiciones consecutivas forma un conjunto de información para un código cíclico de dimensión k . Posteriormente, H. Imai, en 1977, definió un método de construcción de conjuntos de información para códigos cíclicos bidimensionales (esto es, códigos identificados como ideales en un álgebra de grupo para un producto directo de dos grupos cíclicos) que resultaba especialmente apropiado para la aplicación de la generalización de la decodificación por permutación al caso bidimensional. Más tarde, en 2011 establecimos en primer lugar una generalización de las ideas de Imai para la determinación de conjuntos de información al caso de códigos abelianos semisimples (cíclicos multidimensionales) y, en segundo lugar, establecimos condiciones necesarias y suficientes para la aplicación con éxito de la decodificación por permutación a estos códigos. Finalmente, en 2023, mostramos una variación de los métodos descritos que permite su aplicación al caso de los códigos afín-invariantes, y en particular, al caso de los códigos de Reed-Muller.

En esta charla haremos un recorrido por las ideas generales detrás de esta transición.

Referencias

- [1] F. J. MacWilliams, Permutation decoding of systematic codes, Bell Syst. Tech. J., vol. 43, pp. 485–505, 1964.
- [2] H. Imai, A theory of two-dimensional cyclic codes, Inf. Control, vol. 34, pp. 1–21, 1977.
- [3] J. J. Bernal and J. J. Simón, Information sets from defining sets in abelian codes, IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 57, no. 12, pp. 7990–7999, Dec. 2011.
- [4] J. J. Bernal and J. J. Simón, Partial permutation decoding for abelian codes, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 59, no. 8, pp. 5152–5170, 2013.
- [5] J. J. Bernal and J. J. Simón, New advances in permutation decoding of first-order Reed-Muller codes, Finite Fields and their applications, vol. 88, 102182, 2023.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Juan Jacobo Simón. Proyecto parcialmente financiado por PID2020-113206GBIO0 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y Fundación Séneca: 2004/PI/22.

The Schur product of evaluation codes and its application to CSS-T quantum codes and private information retrieval

D. Ruano, Ş. Bodur, F. Hernando, E. Martínez-Moro

IMUVa-Mathematics Research Institute, Universidad de Valladolid, Spain

`diego.ruano@uva.es`

In this work [1], we study the componentwise (Schur) product of monomial–Cartesian codes by exploiting its correspondence with the Minkowski sum of their defining exponent sets. We show that J -affine variety codes are well suited for such products, generalizing earlier results for cyclic, Reed–Muller, hyperbolic, and toric codes. Using this correspondence, we construct CSS–T quantum codes from weighted Reed–Muller codes and from binary subfield-subcodes of J -affine variety codes, leading to codes with better parameters than previously known. Finally, we present Private Information Retrieval (PIR) constructions for multiple colluding servers based on hyperbolic codes and subfield-subcodes of J -affine variety codes, and show that they outperform existing PIR schemes.

References

- [1] Ş. Bodur, F. Hernando, E. Martínez-Moro, D. Ruano (2025). The Schur product of evaluation codes and its application to CSS-T quantum codes and private information retrieval. *arXiv cs.IT*, 2505.10068.

Acknowledgments. This work was supported in part by Grants PID2022-138906NB-C21 and PID2022-138906NB-C22 funded by MICIU/AEI/10.13039/501100011033 and by ERDF/EU, and by Grant CONTPR-2019-385 funded by Universidad de Valladolid and Banco Santander.

Sesión especial 24

Mathematics and Machine Learning

Equipo organizador:

- *Santiago Mazuelas* (Basque Center for Applied Mathematics)
- *Jose Antonio Lozano* (Basque Center for Applied Mathematics)

Description

The mathematics of machine learning traces back to foundational work carried out by several mathematicians in the 1980s, including Vladimir Vapnik and Leslie Valiant. This special session brings together leading national researchers approaching machine learning from a mathematical perspective. The invited speakers are active contributors to the field, regularly publishing in top-tier conferences and journals in machine learning and artificial intelligence. The talks will span a range of research areas, including Bayesian methods, kernel techniques, generative models, and minimax approaches. The session has two main objectives: to promote broader engagement with the mathematics of machine learning within the national mathematical community, and to strengthen the currently small and scattered group of national researchers working on these topics at a highly competitive international level.

Keywords: Supervised learning; Performance guarantees for learning; Bayesian methods for learning; Generative models; Minimax approaches for learning; Reproducing kernel Hilbert spaces.

Programa

MARTES, 20 de enero

11:00 – 11:30	Andres Masegosa (University of Aalborg) <i>From PAC-Chernoff Bounds to Practice: Smooth Interpolators and Near-Optimal Generalization in Deep Learning</i>
11:30 – 12:00	Pablo Moreno Muñoz (Pompeu Fabra) <i>Towards Understanding Generalization in LLMs: A Probabilistic Perspective</i>
12:00 – 12:30	Santiago Mazuelas (BCAM) <i>Beyond Empirical Risk Minimization</i>
15:30 – 16:00	Alberto Gonzalez Sanz (Columbia University) <i>Learning on the Space of Probability measures</i>
16:00 – 16:30	Verónica Álvarez (Massachusetts Institute of Technology) <i>Adaptive Supervised Learning in Time-Dependent Environments</i>
16:30 – 17:00	Pablo Morales Alvarez (Universidad de Granada) <i>SM: Enhanced Localization in Multiple Instance Learning for medical Imaging Classification</i>
17:00 – 17:30	Aritz Pérez (BCAM) <i>Bayesian Networks for Ranking Data</i>
18:00 – 18:30	José Manuel de Frutos (Universidad Carlos III) <i>Training Implicit Generative Models via an Invariant Statistical Loss</i>
18:30 – 19:00	Daniel Hernandez Lobato (Universidad Autónoma de Madrid) <i>Joint Entropy Search for Multi-objective Bayesian Optimization with Constraints and Multiple Fidelities</i>

From PAC-Chernoff Bounds to Practice: Smooth Interpolators and Near-Optimal Generalization in Deep Learning

Andres Masegosa

University of Aalborg

arma@cs.aau.dk

Why do some over-parameterized models generalize remarkably well while others overfit—even when both perfectly interpolate the training data? This talk presents a unified perspective grounded in Large Deviation Theory, combining theoretical insights and practical algorithms to better understand and improve generalization in modern deep learning.

In the first part, we introduce PAC-Chernoff bounds—a new class of distribution-dependent generalization bounds that remain tight even for interpolating models. These bounds identify a natural smoothness measure derived from the rate function of the loss distribution. We show that many regularization strategies—such as L2 penalties, input-gradient constraints, and distance-to-initialization—along with architectural choices like invariance and over-parameterization, implicitly promote smoother interpolators. Our framework explains why such choices often lead to better generalization, even in regimes where classical bounds fail.

In the second part, we operationalize these theoretical insights by proposing the Inverse-Rate Regularizer (IRR)—a practical and scalable estimator of the optimal regularizer implied by PAC-Chernoff theory. IRR uses overlapping-batch estimates of the cumulant generating function to approximate the inverse of the rate function, leading to a principled and adaptive reweighting of training samples. This connects to techniques in sample-adaptive loss functions and distributionally robust optimization. Empirical results on standard vision benchmarks demonstrate that IRR enhances generalization, calibration, and robustness over strong baselines.

Together, these two works bridge the gap between theory and practice: from understanding why certain interpolators generalize, to designing how we can learn them more effectively.

References

- [1] A. R. Masegosa, L. A. Ortega (2025). PAC-Chernoff Bounds: Understanding Generalization in the Interpolation Regime. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 82, 503-562.
- [2] J. Hu, L. A. Ortega, T. M. Laleg, A. R. Masegosa (2025). Towards Near-Optimal Regularization in Deep Learning via the Inverse-Rate Regularizer. Under review, submitted to NeurIPS 2025.

Towards Understanding Generalization in LLMs: A Probabilistic Perspective

Pablo Moreno Muñoz

Universidad Pompeu Fabra

pablo.moreno@upf.edu

The proliferation of foundation models in society, specifically large language models (LLMs) such as Llama, ChatGPT, or Gemini, has put the spotlight on their remarkable generalization abilities. While their predictive performance is impressive at the moment, there are still open questions on why these types of neural network models generalize better than other methods. Answering them is of critical importance for the future, due to security reasons, trustworthiness, energy cost auditing, or fair regulation. Among all questions, we can draw two here: i) Is it because of the learning algorithm? ii) or due to its stochastic nature that implicitly maximizes the evidence of the model? To answer them, looking back at probabilistic learning principles is needed. One good example of this is given by masked pre-training, one of the initial variants of self-supervised learning used in natural language processing (Devlin et al., 2018). Its main strength comes from removing random input dimensions, for later learning a model that can predict the self-induced missing values. Empirical results indicate that this intuitive form of self-supervised learning yields models that generalize very well to new domains. By building a new proof that relies on a previous observation from Fong and Holmes (2020), where log-marginal likelihood equals the average of exhaustive cross-validation, recent results show that such a form of self-supervised learning implicitly performs stochastic maximization of the model's marginal likelihood (Moreno-Muñoz et al. 2023). The latter density is generally acknowledged as being an excellent measure of a model's ability to generalize in the probabilistic setting. Last but not least, this sort of analysis is also validated by empirical results, which also show new ways to understand LLMs, which might change the way we build and conceive AI models in the near future.

References

- [1] J. Devlin, M.-W. Chang, K. Lee, and K. Toutanova (2018). BERT: Pre-training of deep bidirectional transformers for language understanding. arXiv preprint arXiv:1810.04805.
- [2] E. Fong and C. C. Holmes (2020). On the marginal likelihood and cross-validation. *Biometrika*, 107(2):489–496.
- [3] P. Moreno-Muñoz, P. G. Recasens and S. Hauberg (2023). On Masked Pre-training and the Marginal Likelihood, In *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*.

Beyond Empirical Risk Minimization

Santiago Mazuelas

Basque Center for Applied mathematics, BCAM

smazuelas@bcamath.org

The empirical risk minimization (ERM) approach for supervised learning chooses prediction rules that fit training samples and are “simple” (generalize). This approach has been the workhorse of machine learning methods and has enabled a myriad of applications. However, ERM methods strongly rely on the specific training samples available and cannot easily address scenarios affected by distribution shifts or corrupted samples. Robust risk minimization (RRM) is an alternative approach that does not aim to fit training examples and instead chooses prediction rules minimizing the maximum expected loss (risk). This talk presents a learning framework based on the generalized maximum entropy principle that leads to minimax risk classifiers (MRCs). In particular, MRCs can minimize worst-case expected 0-1 loss while providing performance guarantees, and are strongly universally consistent using feature mappings given by characteristic kernels. In addition, the methods presented can provide techniques that are robust to practical situations that defy conventional assumptions, e.g., training samples that follow distributions that change over time.

References

- [1] S. Mazuelas, M. Romero, and P. Grunwald (2023). Minimax risk classifiers with 0-1 loss. *Journal of Machine Learning Research* 1–48.
- [2] S. Mazuelas, Y. Shen, and A. Perez (2022). Generalized maximum entropy for supervised classification. *IEEE Transactions on Information Theory*, 4, 2530-2550.
- [3] P. Grunwald and A. P. Dawid (2004). Game theory, maximum entropy, minimum discrepancy and robust Bayesian decision theory. *The Annals of Statistics*, 32, 1367–1433.

Learning on the Space of Probability Measures

Alberto Gonzalez Sanz

Columbia University

ag4855@columbia.edu

The distribution regression problem encompasses many important statistics and machine learning tasks, and arises in a large range of applications. Among various existing approaches to tackle this problem, kernel methods have become a method of choice. Indeed, kernel distribution regression is both computationally favorable, and supported by a recent learning theory. This theory also tackles the two-stage sampling setting, where only samples from the input distributions are available.

In this talk, we will present new advances in the learning theory of kernel distribution regression. Focusing on kernels based on Hilbertian embeddings, which cover most existing methods, we introduce a novel near-unbiasedness condition on these embeddings. This condition allows us to derive sharper error bounds for the two-stage sampling setting through a new analysis of the sampling effect. We show that this condition holds for key families of kernels, including those based on optimal transport and mean embeddings. As a result, we establish improved convergence rates for these widely used kernels. Finally, we will illustrate these findings with numerical experiments.

References

- [1] F. Bachoc, L. Béthune, A. González-Sanz, J-M. Loubes (2025). Improved learning theory for kernel distribution regression with two-stage sampling. Accepted in the Annals of Statistics.
- [2] F. Bachoc, L. Béthune, A. González-Sanz and J-M. Loubes (2023). Gaussian Processes on Distributions based on Regularized Optimal Transport. Proceedings of The 26th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. pp. 4986-5010.

Adaptive Supervised Learning in Time-Dependent Environments

Verónica Álvarez

Massachusetts Institute of Technology

vealvar@mit.edu

The statistical characteristics of instance-label pairs often change with time in practical scenarios of supervised classification. Conventional learning techniques adapt to such concept drift accounting for a scalar rate of change by means of a carefully chosen learning rate, forgetting factor, or window size. However, the time changes in common scenarios are multidimensional, i.e., different statistical characteristics often change in a different manner. We propose adaptive minimax risk classifiers (AMRCs) that account for multidimensional time changes by means of a multivariate and high-order tracking of the time-varying underlying distribution. In addition, differently from conventional techniques, AMRCs can provide computable tight performance guarantees. Experiments on multiple benchmark datasets show the classification improvement of AMRCs compared to the state-of-the-art and the reliability of the presented performance guarantees.

References

- [1] V. Álvarez, S. Mazuelas, J.A. Lozano (2025). Supervised Learning with Evolving Tasks and Performance Guarantees. *Journal of Machine Learning Research* 26 (17), 1-59.
- [2] V. Álvarez, S. Mazuelas, J.A. Lozano (2023). Minimax forward and backward learning of evolving tasks with performance guarantees. *Advances in Neural Information Processing Systems (Neurips)* 36, 65678-65702.
- [3] V. Álvarez, S. Mazuelas, J.A. Lozano (2022). Minimax classification under concept drift with multidimensional adaptation and performance guarantees. *International Conference on Machine Learning (ICML)*, 486-499.

SM: Enhanced Localization in Multiple Instance Learning for Medical Imaging Classification

Pablo Morales Alvarez

Universidad de Granada

pblomorales@ugr.es

Multiple Instance Learning (MIL) is widely used in medical imaging classification to reduce the labeling effort. While only bag labels are available for training, one typically seeks predictions at both bag and instance levels (classification and localization tasks, respectively). Early MIL methods treated the instances in a bag independently. Recent methods account for global and local dependencies among instances. Although they have yielded excellent results in classification, their performance in terms of localization is comparatively limited. We argue that these models have been designed to target the classification task, while implications at the instance level have not been deeply investigated. Motivated by a simple observation – that neighboring instances are likely to have the same label – we propose a novel, principled, and flexible mechanism to model local dependencies. It can be used alone or combined with any mechanism to model global dependencies (e.g., transformers). A thorough empirical validation shows that our module leads to state-of-the-art performance in localization while being competitive or superior in classification. Our code is publicly available at GitHub.

References

- [1] F.M Castro-Macías, P. Morales-Álvarez, Y Wu, R Molina, AK Katsaggelos (2024). Sm: enhanced localization in Multiple Instance Learning for medical imaging classification. *Advances in Neural Information Processing Systems 38 (NeurIPS 2024)*
- [2] P. Morales-Álvarez, A. Schmidt, J.M. Hernández-Lobato, R. Molina (2024). Introducing instance label correlation in multiple instance learning. Application to cancer detection on histopathological images. *Pattern Recognition*
- [3] A. Schmidt, P. Morales-Álvarez, R. Molina (2023). Probabilistic Modeling of Inter- and Intra-observer Variability in Medical Image Segmentation. *International Conference on Computer Vision (ICCV)*.

Bayesian Networks for Ranking Data

Aritz Pérez

BCAM

aperez@bcamath.org

Modeling ranking data is a central task in many applications, from decision-making and recommendation systems to sports analytics and elections. A fully general model that represents a distribution over rankings requires a factorial number of parameters, making inference and learning computationally intractable. To address this, existing models introduce independence assumptions tailored to the structural constraints of ranking data. These assumptions reduce the number of parameters, simplify inference, and enhance the interpretability of the model. In this talk, I will introduce Graphical Ranking Models (GRMs), a framework to model ranking data based on the standard notions of conditional independence. GRMs rely on ranking variables—categorical variables that represent relative rankings and support the use of conditional independence. In essence, GRMs are Bayesian networks defined on ranking variables and represent probability distributions over partitions of the ranking space. I will show that GRMs generalize several existing models and independence notions for rankings—such as the repeated insertion model and the riffle-shuffle model. I will present the theoretical foundations of GRMs, highlight their expressive power and practical advantages, and discuss open challenges and research opportunities at the intersection of ranking models and probabilistic graphical models.

Training Implicit Generative Models via an Invariant Statistical Loss

José Manuel de Frutos

Universidad Carlos III

jofrutos@ing.uc3m.es

Implicit generative models have the capability to learn arbitrary complex data distributions. On the downside, training requires telling apart real data from artificially-generated ones using adversarial discriminators, leading to unstable training and mode-dropping issues. As reported by Zaheer et al. (2017), even in the one-dimensional (1D) case, training a generative adversarial network (GAN) is challenging and often suboptimal. In this work, we develop a discriminator-free method for training one-dimensional (1D) generative implicit models and subsequently expand this method to accommodate multivariate cases. Our loss function is a discrepancy measure between a suitably chosen transformation of the model samples and a uniform distribution; hence, it is invariant with respect to the true distribution of the data. We first formulate our method for 1D random variables, providing an effective solution for approximate reparameterization of arbitrary complex distributions. Then, we consider the temporal setting (both univariate and multivariate), in which we model the conditional distribution of each sample given the history of the process. We demonstrate through numerical simulations that this new method yields promising results, successfully learning true distributions in a variety of scenarios and mitigating some of the well-known problems that state-of-the-art implicit methods present.

Joint Entropy Search for Multi-objective Bayesian Optimization with Constraints and Multiple Fidelities

Daniel Hernandez Lobato

Universidad Autónoma de Madrid

daniel.hernandez@uam.es

Bayesian optimization (BO) methods can be used to solve efficiently problems with several objectives and constraints. Each objective and constraint is considered a black-box function that is expensive to evaluate, lacking also a closed-form expression. BO methods use a model of each black-box to guide the search for the problem's solution. Specifically, they make intelligent decisions about where each black-box function should be evaluated next with the goal of finding the solution using a few evaluations only. Sometimes, however, the black-boxes may be evaluated at different fidelity levels. A lower fidelity is simply a cheap proxy of the corresponding black-box. These lower fidelities correlate with the actual black-boxes to optimize and can, therefore, be used to reduce the overall cost of solving the optimization problem. Here, we propose Multi-fidelity Joint Entropy Search for Multi-objective Bayesian Optimization with Constraints (MF-JESMOC), a BO method for solving the aforementioned problems. MF-JESMOC chooses the next point, and fidelity level at which to evaluate the black-boxes, as the combination that is expected to reduce the most the joint entropy of the Pareto set and the Pareto front, normalized by the fidelity's cost. We use Deep Gaussian processes to model each black-box and the dependencies between fidelities. These are powerful probabilistic models that can learn the dependency structure among fidelity levels of each black-box. Several experiments show that MF-JESMOC outperforms other state-of-the-art methods for multi-objective BO with constraints and different fidelity levels in both synthetic and real-world problems.

References

- [1] D. Fernández-Sánchez, D. Hernández-Lobato (2024). Joint entropy search for multi-objective Bayesian optimization with constraints and multiple fidelities, *European Symposium on Artificial Neural Networks, Computational Intelligence and Machine Learning*.
- [2] E. C. Garrido-Merchán, D. Hernández-Lobato (2019). Predictive entropy search for multi-objective Bayesian optimization with constraints, *Neurocomputing* 361 50–68.
- [3] C. Hvarfner, F. Hutter, L. Nardi (2022). Joint entropy search for maximally-informed Bayesian optimization. *Advances in Neural Information Processing Systems* (Neurips).

Sesión especial 25

Modelos de decisión estratégica: fundamentos y aplicaciones

Equipo organizador:

- *Ana Meca Martínez* (Universidad Miguel Hernández de Elche)
- *Luis A. Guardiola Alcalá* (Universidad de Alicante)

Descripción

Esta sesión reúne contribuciones recientes que abordan problemas de decisión estratégica desde una perspectiva matemática, combinando herramientas de teoría de juegos cooperativa y no cooperativa. Las ponencias exploran aplicaciones en contextos económicos, sociales y organizativos tan diversos como la gestión aeroportuaria bajo acuerdos de código compartido, la clasificación automática con características dependientes, la planificación territorial con criterios de equidad, la cooperación en mercados agrícolas con compromisos mínimos de exportación, la gestión de inventarios y el intercambio de información en mercados digitales, así como la evolución de convenciones sociales bajo incertidumbre. Además, se presenta un modelo de juego señalizador sobre el proceso de evaluación académica, destacando cómo los incentivos individuales pueden afectar al comportamiento colectivo. En conjunto, la sesión pone de relieve la utilidad analítica de los modelos formales para entender dinámicas estratégicas complejas y ofrecer soluciones con propiedades deseables de equidad, eficiencia o estabilidad.

Palabras clave: Teoría de juegos; Optimización y equidad; Redes de cooperación; Procesos evolutivos; Aplicaciones económicas y sociales.

Programa

JUEVES, 22 de enero

11:00 – 11:30	Alejandro Saavedra-Nieves (Universidade de Santiago de Compostela) <i>On cost allocation in airport operations under code-sharing: a game-theoretical approach</i>
11:30 – 12:00	Laura Davila-Pena (University of Kent) <i>A game-theoretic approach to quantifying the influence of dependent features in classification problems</i>
12:00 – 12:30	Joaquín Sánchez Soriano (Universidad Miguel Hernández) <i>Mathematical optimization and social choice in land reparcelling problems</i>
12:30 – 13:00	Ana Meca (Universidad Miguel Hernández) <i>Minimum Quantity Commitments in Cooperative Agri-Food Export</i>
15:30 – 16:00	J.C. Gonçalves-Dosantos (Universidad Miguel Hernández) <i>Demand Information Sharing in Online Retail Marketplaces</i>
16:00 – 16:30	José A. García-Martínez (Universidad Miguel Hernández) <i>Rejected: Career concerns in the refereeing process</i>
16:30 – 17:00	Juan Francisco Blázquez Pulido (IMT School for Advanced Studies Lucca, University of Milan-Bicocca, Universidad de Alicante) <i>Evolution of Conventions in Uncertain Environments</i>
17:00 – 17:30	Luis A. Guardiola (Universidad de Alicante) <i>The Shapley value and the influence of weak players in Big Boss games</i>

On cost allocation in airport operations under code-sharing: a game-theoretical approach

Alejandro Saavedra-Nieves, M. Gloria Fiestras-Janeiro.

Departamento de Estatística, Análise Matemática e Optimización, Universidade de Santiago de Compostela

alejandro.saavedra.nieves@usc.es

An important operational aspect in airport management is the allocation of fees to aircraft movements on a runway, whether operated by separate operators or under code-sharing agreements. In this talk, we analyse the problem of determining fees under code-sharing of the movements at an airport from a game theoretic perspective. In particular, we propose the configuration value for games with coalition configuration as the mechanism for allocating operating costs. We provide the exact expression of this game-theoretic solution for airport games, which depends only on the parameters of the associated airport problem. For this purpose, we consider a new and natural game-theoretic characterization of the configuration value. Finally, for the specific context of airport games, we apply it to a real case.

References

- [1] M. J. Albizuri, J. Aurrecoechea, J. M. Zarzuelo (2006). Configuration values: Extensions of the coalitional Owen value. *Games Econ. Behav.*, 57(1), 1–17.
- [2] S. C. Littlechild, G. Owen (1973). A simple expression for the Shapley value in a special case. *Manag. Sci.*, 20(3), 370–372.
- [3] M. Vázquez-Brage, A. van den Nouweland, I. García-Jurado (1997). Owen’s coalitional value and aircraft landing fees. *Math. Soc. Sci.*, 34(3), 273–286.

A game-theoretic approach to quantifying the influence of dependent features in classification problems

Laura Davila-Pena, Alejandro Saavedra-Nieves, Balbina Casas-Méndez

Kent Business School, University of Kent

l.davila-pena@kent.ac.uk

We present a novel measure to analyze the influence of features in classification problems, explicitly accounting for dependencies among them. Building on concepts from cooperative game theory, we propose an axiomatic characterization and show that our measure generalizes the Banzhaf-Owen value for games with a priori unions. To enable scalability, we introduce a sampling-based method for estimating the measure in large datasets. We demonstrate the practical value of our approach through a range of applications, highlighting its relevance in real-world classification tasks.

References

- [1] L. Davila-Pena, A. Saavedra-Nieves, B. Casas-Méndez (2025). On the influence of dependent features in classification problems: A game-theoretic perspective. *Expert Syst. Appl.*, 280, 127446.

Acknowledgments. This work is part of the R+D+I project PID2021-124030NB-C32, granted by MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ and by “ERDF A way of making Europe”/EU. This research was also funded by Grupos de Referencia Competitiva ED431C 2021/24 from the Consellería de Cultura, Educación e Universidades, Xunta de Galicia. The authors would like to thank the computational resources of the Centro de Supercomputación de Galicia (CESGA).

Mathematical optimization and social choice in land reparcelling problems

Joaquín Sánchez Soriano, Juan Carlos Gonçalves Dosantos

Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática, Universidad Miguel Hernández

joaquin@umh.es

This paper addresses the urban planning problem of land redistribution from a mathematical perspective. The mathematical optimization problems that may arise in this type of problem are analyzed and attempted to be solved by introducing principles of justice and equity. This, in turn, leads to an analysis from the perspective of social choice theory and game theory to design allocation mechanisms that satisfy relevant properties in the context of the problem and are related to these principles of justice and fairness.

References

- [1] D.W. Pentico (2007). Assignment problems: A golden anniversary survey. *Eur. J. Oper. Res.*, 176, 774–793.
- [2] J.C. Gonçalves-Dosantos, J. Sánchez-Soriano (2023). Apportionment when seats are allocated in lots. The d'Hondt's method case and political implications. *Under revision*.
- [3] H. Moulin (1987). Equal or proportional division of a surplus, and other methods. *Int. J. Game Theory*, 16, 161–186.
- [4] Y. Chun (1988). The proportional solution for rights problems. *Math. Soc. Sci.*, 15, 231–246.
- [5] C. Herrero, M. Maschler, A. Villar (1999). Individual rights and collective responsibility: the rights-egalitarian solution. *Math. Soc. Sci.*, 37, 59–77.
- [6] G. Bergantiños, J. Vidal-Puga (2004). Additive rules in bankruptcy problems and other related problems. *Math. Soc. Sci.*, 47, 87–101.
- [7] G.C. Biddle, R. Steinberg (1984). Allocations of Joint and Common Costs. *J. Account. Lit.*, 3.
- [8] M. Butler, H.P. Williams (2002). Fairness versus Efficiency in Charging for the Use of Common Facilities. *J. Oper. Res. Soc.*, 53, 1324–1329.
- [9] M. Butler, H.P. Williams (2006). The allocation of shared fixed costs. *Eur. J. Oper. Res.*, 170, 391–397.
- [10] T. Estañ, N. Llorca, R. Martínez, J. Sánchez-Soriano (2021). On how to allocate the fixed cost of transport systems. *Ann. Oper. Res.*, 301, 81–105.

Acknowledgments. This work is part of the R+D+I project grants PID2021-12403030NB-C31 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by “ERDF A way of making Europe/E”, and PID2022-137211NB-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by “ERDF A way of making Europe/EU” and from the Generalitat Valenciana under project PROMETEO/2021/063.

Minimum Quantity Commitments in Cooperative Agri-Food Export

Ana Meca, Luis A. Guardiola, Behzad Hezarkhani

Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática, Universidad Miguel Hernández

ana.meca@umh.es

International trade offers significant opportunities for agri-food communities. However, accessing these markets can be costly, especially for small and medium-sized enterprises (SMEs), and trade policies that impose minimum quantity commitments (MQCs) on export volumes, such as licensing tariff rate quota (TRQ) mechanisms, further complicate matters. We demonstrate how cooperation among agri-food exporters can help overcome these barriers and enhance market access for SMEs. By formulating a framework of cooperative games, we identify a gain-sharing mechanism that produces allocations within the corresponding cores, enabling stable grand coalitions of exporters. Our allocation rule exclusively benefits “essential” exporters—those with sufficient cost efficiency. As a result, less cost-efficient “complementary” players, necessary for meeting MQCs, receive no direct benefits from collaboration and must participate altruistically. To address this, we propose two modifications: one based on egalitarian principles and the other on revenue-based rates, both of which allocate a portion of the export surplus to complementary players through taxes on essential exporters. We evaluate these modifications through a case study and discuss their practical implications

References

- [1] P. Feng, X. Zhou, D. Zhang, Z. Chen, S. Wang (2022). The impact of trade policy on global supply chain network equilibrium: A new perspective of product-market chain competition. *Omega*, 109, 102612.
- [2] B. Hezarkhani, S. Arisian, A. Mansouri (2023). Global agricultural supply chains under tariff-rate quotas. *Prod. Oper. Manag.*, 32(11), 3634–3649.

Acknowledgments. This work is part of the R+D+I project grants PID2022-137211NB-I00, that were funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ and by “ERDF A way of making Europe”/EU. This research was also funded by project PROMETEO/2021/063 from the Conselleria d’Innovació, Universitats, Ciència i Societat Digital, Generalitat Valenciana.

Demand Information Sharing in Online Retail Marketplaces

J.C. Gonçalves-Dosantos, F. Bernstein, I. García-Jurado, A. Meca

Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática, Universidad Miguel Hernández

juan.carlos.goncalves@udc.es

In this paper we make use of game theory tools to address a specific type of problems that arise in inventory management in multi-agent markets. In particular, we study which market characteristics are able to generate incentives for agents to buy and share information that help them to improve the prediction of their demands and, thus, to improve their inventory policies. We modeled the retailers' decisions regarding demand information acquisition and sharing as a biform game. Our findings demonstrate that, for any set of demand information acquisition strategies, there are clear incentives for cooperation among retailers. Moreover, no coalition of retailers has an incentive to abandon cooperation in pursuit of a better outcome independently. We introduce a family of benefit distribution rules that are coalitionally stable. Additionally, we show that demand information acquisition can always reach equilibrium, irrespective of the value of the information. We further analyze the equilibria in scenarios with specific characteristics. Finally, we compare the equilibria derived from our model with those obtained in a centralized setting.

References

- [1] A. Brandenburger, H. Stuart (2007). Biform games. *Manag. Sci.*, 53(4), 537–549.
- [2] Y. Qin, R. Wang, A.J. Vakharia, Y. Chen, M.M. Seref (2011). The newsvendor problem: Review and directions for future research. *Eur. J. Oper. Res.*, 213(2), 361–374.
- [3] K. Zhu, U.W. Thonemann (2004). Modeling the benefits of sharing future demand information. *Oper. Res.*, 52(1), 136–147.

Acknowledgments. This work is part of the R+D+I project grants PID2021-124030NB-C31 and PID2022-137211NB-100, that are funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ and by ERDF “A way of making Europe”/EU. This research was also funded by project PROMETEO/2021/063 from the Conselleria d’Innovació, Universitats, Ciència i Societat Digital, Generalitat Valenciana, and by the Xunta de Galicia (Grupos de Referencia Competitiva ED431C-2024/14).

Rejected: Career concerns in the refereeing process

José A. García-Martínez, Ascensión Andina-Díaz, Nektaria Glynia

Departamento de Estudios Económicos y Financieros, Universidad Miguel Hernández

jose.garciam@umh.es

We study how career concerns influence the refereeing process, modeling it as a signaling game. Our framework involves a journal editor and two referees who may differ in both reputation and ability. A referee's reputation is public information, while a referee's ability is private information. We identify an incentive for low-ability referees to reject good papers—a phenomenon we call over-rejection—and find that this incentive increases with the referee's reputation. We show that over-rejection decreases with competition, referee homogeneity, and the anonymity of the refereeing process. In contrast to low-ability experts, high-ability referees are sincere in equilibrium. Since a referee with a higher reputation is ex-ante more likely to be high-ability, our results suggest that the probability of rejection is inverted U-shaped in the referee's reputation. We empirically test this result. We use data from Card and DellaVigna (2020) for submissions to four top economic journals in the period 2003-2013 and use the referee's publication record as a proxy for the referee's reputation. We find that the probability of sending a negative recommendation increases with the referee's reputation in the early stages of the career and decreases thereafter, suggesting an inverted U-shaped form in line with our theoretical results.

References

- [1] A. Andina-Díaz, J.A. García-Martínez (2020). Reputation and news suppression in the media industry. *Games Econ. Behav.*, 123, 240–271.
- [2] A. Andina-Díaz, J.A. García-Martínez (2025). Garbling an evaluation to retain an advantage. *Eur. Econ. Rev.*, 172, 104940.
- [3] D. Card, S. DellaVigna (2020). What do editors maximize? evidence from four economics journals. *Rev. Econ. Stat.*, 102(1), 195–217.
- [4] D. Card, S. DellaVigna, P. Funk, I. Nagore (2020). Are referees and editors in economics gender neutral?. *Q. J. Econ.*, 135(1), 269–327.
- [5] G. Levy (2005). Careerist judges and the appeals process. *Rand J. Econ.*, 275–297.
- [6] D. Hirshleifer (2015). Cosmetic surgery in the academic review process. *Rev. Financ. Stud.*, 28(3), 637–649.

Acknowledgments. We gratefully acknowledge the financial support from the Ministerio de Ciencia e Innovación through projects PID2021-127736NB-I00 and PID2022-137211NB-I00, and the Junta de Andalucía through project P18-FR-3840.

Evolution of Conventions in Uncertain Environments

Juan Francisco Blazquiz-Pulido, Ennio Bilancini, Leonardo Boncinelli

IMT School for Advanced Studies Lucca, University of Milan-Bicocca, Universidad de Alicante

jf.blazquizpulido@imtlucca.it

We study the role of uncertainty in the evolution of conventions in coordination games when agents are myopic best responders. We introduce uncertainty of the choice environment by means of an ergodic Markov process ruling the switching across a collection of 2-player symmetric coordination games with the same strategy sets but different payoffs, referred to as scenarios. We apply stochastic stability analysis to study the selection of equilibria in the long run when there are multiple scenarios with diverse characteristics. We show that the stochastically stable states may be entirely determined by one or more scenarios that are played very rarely, so changing dramatically any prediction based exclusively on the most likely scenarios. Moreover, we show that the error model determines which scenarios play such crucial role, indicating that any abstraction from low probability scenarios should be evaluated in the light of the considered error model. Finally, we show how to compute the radius and the coradius of a convention in this setup.

References

- [1] J. Bergin, B.L. Lipman (1996). Evolution with state-dependent mutations. *Econometrica*, 64, 943–956.
- [2] E. Bilancini, L. Boncinelli (2020). The evolution of conventions under condition-dependent mistakes. *Econ. Theory*, 70, 1–25.
- [3] G. Ellison (2000). Basins of attraction, long-run stochastic stability, and the speed of step-by-step evolution. *Rev. Econ. Stud.*, 67(1), 17–45.
- [4] J. Newton (2021). Conventions under heterogeneous behavioural rules. *Rev. Econ. Stud.*, 88(4), 2094–2118.
- [5] H.P. Young (1993). The evolution of conventions. *Econometrica*, 61, 57–84.

Acknowledgments. The authors gratefully acknowledge financial support from the Italian Ministry of Education, University and Research (MIUR) through the PRIN project Co.S.Mo.Pro.Be. “Cognition, Social Motives and Prosocial Behavior” (grant n. 20178293XT) and from the IMT School for Advanced Studies Lucca through the PAI project Pro.Co.P.E. “Prosociality, Cognition, and Peer Effects”.

The Shapley value and the influence of weak players in Big Boss games

Luis A. Guardiola, Ana Meca

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

luis.guardiola@ua.es

Big Boss Games represent a specific class of cooperative games where a single veto player, known as the Big Boss, plays a central role in determining resource allocation and maintaining coalition stability. In this work, we introduce a novel allocation scheme for Big Boss games, based on two classical solution concepts: the Shapley value and the τ -value. This scheme generates a coalitionally stable allocation that effectively accounts for the contributions of weaker players. Specifically, we consider a diagonal of the core that includes the Big Boss's maximum aspirations, the τ -value, and those of the weaker players. From these allocations, we select the one that is closest to the Shapley value, referred to as the Projected Shapley Value allocation (PSV allocation). Through our analysis, we identify a new property of Big Boss games, particularly the relationship between the allocation discrepancies assigned by the τ -value and the Shapley value, with a particular focus on the Big Boss and the other players. Additionally, we provide a new characterization of convexity within this context. Finally, we conduct a statistical analysis to assess the position of the PSV allocation within the core, especially in cases where computing the Shapley value is computationally challenging.

References

- [1] S. Muto, J. Potters, S. Tijs (2020). On big boss games. *Econ. Stud. Q.*, 39(4): 303–321.

Acknowledgments. This work is part of the R+D+I project grants PID2022-137211NB-100, that were funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ and by “ERDF A way of making Europe”/EU. This research was also funded by project PROMETEO/2021/063 from the Conselleria d’Innovació, Universitats, Ciència i Societat Digital, Generalitat Valenciana. The authors would like to thank Professor Domingo Morales for his insightful comments on this paper.

This paper is dedicated to the memory of Stef Tijs, for his contribution to the creation and consolidation of most of the cooperative game theory research groups in Spain. Thank you, Stef, for your dedication, for transmitting your vast knowledge, for your tireless commitment, and for the affection you always showed to the GATHER group at the I.U. Centro de Investigación Operativa of the Universidad Miguel Hernández de Elche. Your legacy lives on in each of us, and your influence on our research and our professional and personal lives endures.

Sesión especial 26

Optimización continua

Equipo organizador:

- *Rubén Campoy* (Universidad de Alicante)
- *César López Pastor* (Universidad de Alicante)

Descripción

Esta sesión está dedicada a la presentación y discusión de avances recientes en investigación teórica y aplicada en el ámbito de la optimización continua. Se abordarán temas que incluyen, entre otros, optimización lineal, convexa, o no lineal; programación semiinfinita y optimización infinito-dimensional; optimización paramétrica, estabilidad, sensibilidad y buen planteamiento; optimización vectorial y conjunto-valuada; optimización estocástica o bajo incertidumbre; y aplicaciones en finanzas e ingeniería, entre otras. La sesión también pone especial énfasis en el desarrollo de herramientas y métodos matemáticos relacionados, como los provenientes del análisis convexo, el análisis variacional, la derivación generalizada o el diseño de algoritmos, los cuales resultan fundamentales para el estudio y la resolución de problemas de optimización.

Palabras clave: Optimización; Análisis convexo y variacional; Estabilidad y sensibilidad; Algoritmos numéricos.

Programa

JUEVES, 22 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:30 | David Torregrosa Belén (Universidad de Alicante)
<i>Randomized block coordinate descent beyond global Lipschitz gradient continuity</i> |
| 11:30 – 12:00 | Jan-J. Rückmann (University of Bergen)
<i>MPCC: Strong Stability for different stationarity concepts</i> |
| 12:00 – 12:30 | Abderrahim Hantoute (Universidad de Alicante)
<i>Some new dual formulations in infinite convex optimization</i> |
| 12:30 – 13:00 | Juan Parra (Universidad Miguel Hernández de Elche)
<i>Lipschitz modulus of quadratic optimization problems with an application to metric projection</i> |
| 15:30 – 16:00 | María Dolores Fajardo (Universidad de Alicante)
<i>Perturbational approach to duality in evenly convex set-valued optimization</i> |
| 16:00 – 16:30 | F. Javier Toledo (Universidad Miguel Hernández de Elche)
<i>Parametrization of the characteristic curve of the photovoltaic single-diode model: applications to optimization problems</i> |
| 16:30 – 17:00 | César López Pastor (Universidad de Alicante)
<i>A unifying graph-based analysis of projection algorithms for linear subspaces</i> |

VIERNES, 23 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:30 | Tereso del Río (Johannes Kepler University Linz)
<i>Domain Specific Language to Optimise Industrial Processes</i> |
| 11:30 – 12:00 | Jesús Camacho (Universidad Miguel Hernández de Elche)
<i>Lipschitz upper semicontinuity of fully perturbed linear systems</i> |
| 12:00 – 12:30 | Rubén Campoy (Universidad de Alicante)
<i>Designing proximal-gradient algorithms through graph structures</i> |

Randomized block coordinate descent beyond global Lipschitz gradient continuity

David Torregrosa Belén, Pedro Pérez-Aros

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

david.torregrosa@ua.es

Randomized block-coordinate algorithms are recognized to furnish efficient iterative schemes for addressing large-scale problems, especially when the computation of full derivatives entails substantial memory requirements and computational efforts. Classically, the convergence analysis of these methods relies on a standard assumption of global Lipschitz continuity of partial gradients of differentiable functions. This compromises its applicability to situations where gradient Lipschitz continuity is violated, for instance, in nonnegative matrix factorization or recovery of signals from quadratic measurements. In this talk, we present a randomized block proximal gradient algorithm for addressing the sum of a separable (nonsmooth) proper lower-semicontinuous function and a differentiable function whose partial gradients are assumed to be Lipschitz continuous only locally. At each iteration, the method adaptively selects a proximal stepsize to satisfy a sufficient decrease condition without prior knowledge of the local Lipschitz moduli of the partial gradients of the differentiable function. We conduct a thorough analysis of the convergence of the method and illustrate its performance in an experiment in image compression.

MPCC: Strong Stability for different stationarity concepts

Jan-J. Rückmann, Daniel Hernández Escobar, Harald Günzel

Department of Informatics, University of Bergen

jan-joachim.ruckmann@uib.no

In this lecture we consider the problem class of mathematical problems with complementarity constraints (MPCC) in a finite-dimensional setting. Contrarily to standard nonlinear programming problems (that is, with finitely many equality and/or inequality constraints) when exactly one stationarity concept is used, for MPCC several stationarity concepts have been introduced. For some of them, e.g. for C-, M- and S-stationarity points, we discuss algebraic and topological equivalent characterizations for the strong stability of such a stationary point. Strong stability was originally introduced by Kojima for standard nonlinear programming and it refers to existence, uniqueness and continuous dependence of a stationary point for each sufficiently small perturbed problem with perturbations up to second order. This property of strong stability is therefore an important feature for sensitivity analysis and parametric optimization.

Some new dual formulations in infinite convex optimization

Abderrahim Hantoute

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

hantoute@ua.es

We propose two new dual formulations in infinite convex optimization, relying on Lagrangian-type functions that involve infinitely many dual variables and infinite sums of functions. We prove that the Slater condition guarantees the strong duality, in contrast with the Haar duality, where the Slater condition does not ensure strong duality even in the case of semi-infinite linear optimization. We apply extended concepts of uniform lower semicontinuity of infinite collections of functions, and establish general duality results via fuzzy multiplier rules for infinite sums.

Lipschitz modulus of quadratic optimization problems with an application to metric projection

Juan Parra, María Josefa Cánovas, Masao Fukushima

Centro de Investigación Operativa, Universidad Miguel Hernández de Elche

parra@umh.es

This talk was initially motivated by the computation of the Lipschitz modulus of the metric projection on polyhedral sets in the Euclidean space. In our framework, both the reference point and the polyhedron where it is projected are subject to perturbations. As far as the metric projection in the current setting is nothing else but the solution set of a particular strictly convex quadratic problem, our initial problem is solved as a particular case of the results of this work. In fact, we deal with the optimal set (argmin) mapping of a canonically perturbed convex quadratic model; i.e., where linear perturbations of the objective function together with perturbations of the right-hand side are allowed. In this framework, we provide an implementable formula (only appealing to the initial problem's data) for computing the Lipschitz modulus of the optimal set mapping through the concept of minimal Karush-Kuhn-Tucker subset of indices. These subsets of indices have played a decisive role in the computation of Lipschitz and calmness moduli in linear optimization.

Perturbational approach to duality in evenly convex set-valued optimization

María Dolores Fajardo

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

md.fajardo@ua.es

A general perturbation approach to conjugate duality theory in set-valued optimization considering set criterion, where the image space is a complete lattice whose elements are evenly convex sets, is presented. This image space structure is suitable for the conjugation scheme for set-valued functions called c-conjugation, and it allows to obtain a dual problem for a general primal one verifying weak duality. Fenchel and Lagrange dual problems are presented as examples. We also obtain zero duality gap and strong duality theorems.

Parametrization of the characteristic curve of the photovoltaic single-diode model: applications to optimization problems

F. Javier Toledo, Vicente Galiano, José M. Blanes, Victoria Herranz, Efstratios Batzelis

Centro de Investigación Operativa, Universidad Miguel Hernández de Elche

javier.toledo@umh.es

In this talk, we present the first parametrization in the literature of the characteristic curve, also called I-V curve, of the photovoltaic single-diode model. A key insight in obtaining this parametrization is the fact that the I-V curve has a left-hand oblique asymptote, since the chosen parameter turns out to be the vertical distance from the curve to this asymptote. This parametrization has recently been applied to solve various optimization problems, including the computation of the Euclidean distance from a point to the I-V curve, the efficient graphical representation of the curve, and the computation of its maximum power point.

A unifying graph-based analysis of projection algorithms for linear subspaces

César López Pastor, *Francisco J. Aragón Artacho, Heinz H. Bauschke, Rubén Campoy*

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

cesar.lopez@ua.es

This work develops a general analysis for the fixed points of the operators defining the graph splitting methods by Bredies, Chenchene and Naldi. We particularize it to the case of projection algorithms for closed linear subspaces and provide an explicit formula for the limit points of the graph splitting schemes. We exemplify these results on some particular algorithms, unifying in this way some results previously derived as well as obtaining new ones.

Domain Specific Language to Optimise Industrial Processes

Tereso del Río, Wolfgang Schreiner, Martina Seidl

Research Institute in Symbolic Computation, JKU, Austria; Institute for Symbolic Artificial Intelligence, JKU, Austria

`tereso.del.rio@risc.jku.at`

Many industrial processes involve decisions that affect their speed, cost, and/or waste generated. We present a Domain-Specific Language prototype that transforms simple code descriptions of machines into formal constraints and objective functions. This allows industrial partners to model their pipelines and solve their optimisation problems through symbolic solvers without requiring expertise in these areas. As a case study, we focus on a rolling-horizon optimization problem under uncertainty deduced from a wood processing pipeline, in which the decisions taken determine the amount of material that is wasted.

Lipschitz upper semicontinuity of fully perturbed linear systems

Jesús Camacho

Centro de Investigación Operativa, Universidad Miguel Hernández de Elche

j.camacho@umh.es

This presentation aims to show the process of computing the Lipschitz upper semicontinuity modulus of linear inequality systems under full perturbations, i.e., when all coefficients are allowed to be perturbed. This talk is preluded by the obtention of a point-based (only relying on the nominal data) formula for such a quantity in the right-hand side framework. The differences between the two parametric contexts will be emphasized.

Designing proximal-gradient algorithms through graph sctructures

Rubén Campoy, Francisco J. Aragón Artacho, César López Pastor

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

ruben.campoy@ua.es

In this talk, we present a general framework for designing forward-backward methods, which include proximal-gradient algorithms for optimization problemas as a particular class. Our methodology builds on recent techniques and extends them to settings involving multiple smooth functions, where gradients are directly evaluated instead of using proximal mappings. The algorithms are constructed through three interacting graphs that define how the variables are coupled and how iterations are computed. This unified framework not only recovers several known schemes but also enables the derivation of new ones.

Sesión especial 27

Partial Differential Equations, Inverse Problems and Machine Learning

Equipo organizador:

- *Carlos Esteve Yagüe* (Universitat d'Alacant)
- *Domènec Ruiz i Balet* (Universitat de Barcelona)

Description

This minisymposium explores recent advances at the intersection of partial differential equations, control theory, and machine learning, with a particular focus on applications to neural architectures such as Transformers and generative models. Several talks address the mathematical structure of self-attention and its mean-field and gradient flow limits, unveiling phenomena such as metastability and clustering. Others examine the control of probability distributions via continuity equations, variational methods, and entropy-based metrics. Novel perspectives on numerical methods for partial differential equations and inverse problems further broaden the scope of this session. Altogether, the symposium highlights the deepening dialogue between classical analysis and modern data-driven modeling.

Keywords: Partial Differential Equations; Mean-field models; Inverse Problems; Neural Networks; Transformers.

Programa

JUEVES, 22 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:30 | Gissell Estrada-Rodríguez (Universitat Politècnica de Catalunya)
<i>Nonlocal interaction kernels inference in nonlinear gradient flow equations</i> |
| 11:30 – 12:00 | Johannes Schwab (University of Innsbruck)
<i>Solving inverse problems with diffusion models</i> |
| 12:00 – 12:30 | Nadja Gruber (Medical University of Innsbruck)
<i>Noisier2Inverse: Self-Supervised Learning for Image Reconstruction with Correlated Noise</i> |
| 12:30 – 13:00 | Jon Asier Bárcena Petisco (Universidad del País Vasco)
<i>Resolution of parametric elliptic PDEs via Neural Networks</i> |
| 15:30 – 16:00 | Valérie Castin, (École Normale Supérieure de Paris)
<i>The mean-field dynamics of deep Transformers</i> |
| 16:00 – 16:30 | Anna Shalova (TU Eindhoven)
<i>Variational analysis of toy Transformers</i> |
| 16:30 – 17:00 | Hugo Koubbi (Université Paris Dauphine)
<i>Dynamic metastability in the self attention model</i> |
| 17:00 – 17:30 | Yury Korolev (University of Bath)
<i>Large-time dynamics in transformer architectures with layer normalisation</i> |

VIERNES, 23 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:30 | Francisco Periago (Universidad Politécnica de Cartagena)
<i>Universal approximation of set-valued maps and application to control</i> |
| 11:30 – 12:00 | Carlos Castro (Universidad Politécnica de Madrid)
<i>Numerical approximation of the 3-D Navier-Lamé system in an exterior domain using the fundamental solutions method</i> |
| 12:00 – 12:30 | Antonio Álvarez López (Universidad Autónoma de Madrid)
<i>Entropy-driven control of the continuity equation for normalizing flows</i> |

Nonlocal interaction kernels inference in nonlinear gradient flow equations

Gissell Estrada-Rodríguez

Department of Mathematics, Universitat Politècnica de Catalunya

gissell.estrada@upc.edu

When applying nonlinear aggregation-diffusion equations to model real life phenomenon, a major challenge lies on the choice of the interaction potential. Previous numerical and theoretical studies typically required predetermination of terms and the goal is often to reproduce the observed dynamics qualitatively, not quantitatively. In this talk, we address the inverse problem of identifying nonlocal interaction potentials in nonlinear aggregation-diffusion equations from noisy discrete trajectory data. Our approach involves formulating and solving a regularised variational problem, which requires minimising a quadratic error functional across a set of hypothesis functions. A key theoretical contribution is our novel stability estimate for the PDE, validating the error functional ability in controlling the 2-Wasserstein distance between solutions generated using the true and estimated interaction potentials. We demonstrate the effectiveness of the methods through various 1D and 2D examples showcasing collective behaviours.

Solving inverse problems with diffusion models

Johannes Schwab

Department of Mathematics, University of Innsbruck

johannes.schwab@uibk.ac.at

Inverse problems arise in many scientific domains where the goal is to recover signals from indirect or incomplete measurements. The main difficulty lies in the ill-posedness of the problem. Traditional approaches typically rely on handcrafted priors or regularization techniques, which can struggle with complex data distributions. Recently, diffusion models have emerged as powerful generative tools capable of learning intricate data priors from large-scale datasets.

In this talk, we explore how diffusion models can be leveraged to solve inverse problems in a principled way. We present a framework where diffusion models serve as implicit priors, enabling high-quality reconstructions while at the same time guarantee consistency with the measured data. Applications include image deblurring, super-resolution, and medical imaging, among others. We discuss the theoretical underpinnings, practical implementation strategies, and show initial results which are compared to classical and deep learning baselines.

Noisier2Inverse: Self-Supervised Learning for Image Reconstruction with Correlated Noise

Nadja Gruber

Faculty of AISCM, Medical University of Innsbruck

nadja.gruber@i-med.ac.at

In this talk, I will present Noisier2Inverse, a novel self-supervised deep learning framework for solving general inverse problems—without the need for clean ground truth data. Unlike classical methods that rely on uncorrelated noise assumptions, Noisier2Inverse is specifically designed for statistically correlated noise, which is common in applications like computed tomography, microscopy, and seismic imaging.

Building on ideas from Noisier2Noise, our method leverages synthetic noise augmentation to train a reconstruction network. However, instead of learning to recover the original noisy data, we train directly in the measurement space to reconstruct an extrapolated image. This key innovation removes the need for a separate extrapolation step at inference time—avoiding the instability often introduced by ill-posedness.

We show that Noisier2Inverse significantly outperforms existing self-supervised approaches when it comes to handling complex, correlated noise structures, making it a robust solution for real-world imaging tasks where high-quality ground truth is not available.

Resolution of parametric elliptic PDEs via Neural Networks

Jon Asier Bárcena Petisco

Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco

jonasier.barcena@ehu.eus

In this talk we construct a Neural Network that approximates the matrix multiplication operator for any activation function such that there exists a Neural Network which can approximate the scalar multiplication function. In particular, we use the Strassen algorithm to bound the number of weights and layers needed for such Neural Networks. This allows us to define another Neural Network for approximating the inverse matrix operator. Also, by relying on the Galerkin method, we apply those Neural Networks to solve parametric elliptic PDEs for a whole set of parameters. Finally, we discuss improvements with respect to the prior results.

The mean-field dynamics of deep Transformers

Valérie Castin

Département de Mathématiques et Applications, Ecole Normale Supérieure de Paris

valerie.castin@ens.psl.eu

Transformers, that underlie the recent successes of large language models, represent the data as sequences of vectors called tokens. This representation is leveraged by the attention function, which learns dependencies between tokens and is key to the success of Transformers. However, the dynamics induced by the iterative application of attention across layers remain to be fully understood. To analyze these dynamics, we identify each input sequence with a probability measure, thus handling input sequences of arbitrary length, and model its evolution as a Vlasov equation called Transformer PDE, whose velocity field is non-linear in the probability measure. For compactly supported initial data and several self-attention variants, we show the Transformer PDE is well-posed and is the mean-field limit of an interacting particle system. We also study the case of Gaussian initial data, which has the nice property of staying Gaussian across the dynamics. This allows us to identify typical behaviors theoretically and numerically, and to highlight a clustering phenomenon that parallels previous results in the discrete case.

Variational analysis of toy transformers

Anna Shalova

Department of Mathematics and Computer Sciences, Technische Universiteit Eindhoven

a.shalova@tue.nl

Transformers are, arguably, the state-of-the-art models in natural language processing and various other applications. While transformers are widely used in practice, the theoretical understanding of their behavior is very limited. However, recently, the clustering phenomena in toy transformers has been explained by Geshkovski et al. (2024). While being one of the key phenomena arising in transformers, clustering discourages variability of predictions and thus cannot be the only driving mechanism behind transformers. In this talk I will discuss two aggregation-diffusion models which can be interpreted as extensions of the toy transformers mentioned above. I will give a variational characterization of solutions to the underlying PDEs and show that the diffusive terms can be interpreted as the mechanisms promoting diversity of predictions in transformers. The talk is based on joint works with André Schlichting and Mark Peletier.

Dynamic metastability in the self attention model

Hugo Koubbi

CEREMADE, Université Paris Dauphine

hugo.koubbi@yale.edu

We consider the self-attention model—an interacting particle system on the unit sphere, which serves as a toy model for Transformers, the deep neural network architecture behind the recent successes of large language models. We prove the appearance of dynamic metastability conjectured in [1]—although particles collapse to a single cluster in infinite time, they remain trapped near a configuration of several clusters for an exponentially long period of time. By leveraging a gradient flow interpretation of the system, we also connect our result to an overarching framework of slow motion of gradient flows proposed by Otto and Reznikoff [2] in the context of coarsening and the Allen-Cahn equation. We finally probe the dynamics beyond the exponentially long period of metastability, and illustrate that, under an appropriate time-rescaling, the energy reaches its global maximum in finite time and has a staircase profile, with trajectories manifesting saddle-to-saddle-like behavior, reminiscent of recent works in the analysis of training dynamics via gradient descent for two-layer neural networks.

References

- [1] B. Geshkovski, C. Letrouit, Y. Polyanskiy and Ph. Rigollet (2023). A mathematical perspective on transformers. *arXiv preprint arXiv:2312.10794*.
- [2] F. Otto and M.G. Reznikoff (2007). Slow motion of gradient flows. *Journal of Differential Equations*, 237 2, 372–420.

Large-time dynamics in transformer architectures with layer normalisation

Yury Korolev

Department of Mathematical Sciences, University of Bath

ymk30@bath.ac.uk

Transformers have become the backbone of many modern AI systems. A series of recent works have demonstrated that they can be understood mathematically as transformations of measures. We focus on a special case when the propagation of a measure through the transformer follows a gradient flow in the space of probability measures on the unit sphere under a variant of the Wasserstein metric with a non-local mobility term. This allows us to investigate the emergence of either clusters or absolutely continuous measures in the large-time limit and to characterise them as stationary points of an interaction energy. We further investigate how the stationary points depend on the parameters of the transformer, in particular on the eigenvalues and eigenvectors of the product of the key and query matrices. The rigorous framework for studying the gradient flow that we provide also suggests a possible metric geometry for studying the general case (i.e. one that is not described by a gradient flow).

Universal approximation of set-valued maps and application to control

Francisco Periago

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad Politécnica de Cartagena

f.periago@upct.es

Set-valued maps appear in a number of situations in Control Theory. For instance, the operator that maps each initial condition of a dynamical system to a control that steers the state of the associated system to a given target state in a prescribed horizon is, in general, multi-valued. In order to support the use of neural networks for approximating such set-valued operators, a universal approximation theorem for set-valued maps is presented. Then, an approximation scheme is proposed for specific selections of the set-valued maps using DeepONets. Interestingly, it is shown that the proposed scheme breaks the curse of dimensionality for both approximation and estimation errors. Additionally, and as a first step towards the approximation of the whole set-valued map, Single Input Multiple Output Nets (SIMONets) are introduced and analysed. Numerical simulation results for the emblematic examples of the heat and wave equations will be shown as well.

Numerical approximation of the 3-D Navier-Lamé system in an exterior domain using the fundamental solutions method

Carlos Castro

Departamento de Matemática e Informática, Universidad Politécnica de Madrid

carlos.castro@upm.es

We obtain a new addition theorem for the fundamental solution of the Navier-Lamé system in three dimensions, incorporating radiation conditions to simulate outgoing waves at infinity. This provides an expansion of this fundamental solution that requires only the evaluation of Bessel functions and scalar spherical harmonics. This is particularly useful in collocation numerical methods based on fundamental solutions, such as the boundary element method or the method of fundamental solutions. For the latter, we show its efficiency when approximating the Navier-Lamé system in exterior domains. We also give some applications to inverse problems.

Entropy-driven control of the continuity equation for normalizing flows

Antonio Álvarez López

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

antonio.alvarezl@uam.es

Normalizing flows are generative models that transform a simple (typically Gaussian) reference probability distribution into a complex target distribution through a sequence of smooth, invertible maps. Within the continuous-time framework of neural ODEs, the objective can be recast as a control problem for the continuity equation: we seek a time-dependent vector field that drives the final-time distribution arbitrarily close to the target.

Under a mild tail-compatibility assumption, we establish approximate controllability of this system when the error is measured in relative entropy. The proof is constructive and combines a reverse Pinsker inequality with a piecewise-constant-in-time control scheme that yields explicit bounds on the required number of switches. The result sheds light on the reachable set of the continuity equation in relative entropy and links classical control theory with modern flow-based generative modeling.

Sesión especial 28

Point configurations: energy minimization, discrepancy, and related topics

Equipo organizador:

- *Ujué Etayo* (CUNEF Universidad)
- *Pedro R. López-Gómez* (Universidad de Cantabria)

Description

Given a compact topological space—which we may endow with significantly more structure—and a natural number N , which set of N points best represents the space? The answer depends crucially on how we interpret the notion of *representation*. This session brings together researchers who address this question from various perspectives: from geometric combinatorics, looking for cubature nodes and t -designs; from the intrinsic geometry of the space, through the study of point discrepancies; and from classical potential theory, via points that minimize certain energies. Our goal is to foster dialogue across these communities, highlighting connections and uncovering unifying principles in the study of optimal point configurations.

Keywords: Point configurations; minimal energy; discrepancy; potential theory; equidistribution.

Programa

JUEVES, 22 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:30 | Pablo García Arias (Universitat de Barcelona)
<i>Measuring the equidistribution of point processes via the Wasserstein distance</i> |
| 11:30 – 12:00 | Víctor J. Maciá (CUNEF Universidad)
<i>Some Gaussianity criteria for Khinchin families</i> |
| 12:00 – 12:30 | Joaquim Ortega Cerdà (Universitat de Barcelona)
<i>Fluctuations of eigenvalues of random normal matrices</i> |
| 12:30 – 13:00 | Ujué Etayo (CUNEF Universidad)
<i>Condition number of polynomials and minimizers of Bergman and logarithmic energies</i> |
| 15:30 – 16:00 | Damir Ferizović (KU Leuven)
<i>Point constructions on the sphere with small discrepancy</i> |
| 16:00 – 16:30 | Giacomo Gigante (University of Bergamo)
<i>Irregularities of distribution on compact two-point homogeneous spaces</i> |
| 16:30 – 17:00 | Bianca Gariboldi (University of Bergamo)
<i>Marcinkiewicz–Zygmund families and inverse problems</i> |
| 17:00 – 17:30 | Dmitriy Bilyk (University of Minnesota)
<i>Spherical cap discrepancy, sums of distances, and positive definite functions</i> |
| 18:00 – 18:30 | Jordi Marzo (Universitat de Barcelona)
<i>Hyperuniformity and the Sum Rule</i> |
| 18:30 – 19:00 | Bence Borda (University of Sussex)
<i>Optimal transport of point configurations via harmonic analysis</i> |

VIERNES, 23 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:30 | Pedro R. López-Gómez (Universidad de Cantabria)
<i>Points on $SO(3)$ with low logarithmic energy</i> |
| 11:30 – 12:00 | Open problem session I |
| 12:00 – 12:30 | Open problem session II |

Measuring the equidistribution of point processes via the Wasserstein distance

Pablo García Arias

Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona

pablo.garcia.arias@ub.edu

Determinantal Point Processes (abbreviated DPP) are a type of random point processes that have gained some interest due to its applications in physics, its frequent appearance in random matrix theory, and its ability to get uniformly distributed points. The classical way of measuring the latter is using the discrepancy. In recent years the Wasserstein distance has also been considered as another interesting option to do so. The focus of this talk will be the expected value of the Wasserstein distance W_2 between the empirical measure and the background volume form. This can be studied applying an smoothing via the heat equation, which transforms the problem into finding adequate bounds to the variance of linear statistics of the eigenfunctions associated to the Laplace–Beltrami operator. This technic already works in great generality in high dimension $d \geq 3$, while for dimension $d = 2$ one requires to study each point process with more detail. This is expected, as i.i.d. points obtain optimal asymptotic in these higher dimensions.

This talk will explain how this can be applied to the Harmonic ensemble, variations of it in the torus, the Spherical ensemble, and the zero set of Gaussian Analytic Functions on the sphere. This smoothing technic is able to get optimal asymptotics in all of this cases, despite the different behaviour of the variance – illustrating how this method can work well for different point processes.

References

- [1] P. García Arias (2024). Equidistribution of points in the Harmonic ensemble for the Wasserstein distance. *Preprint at* arxiv.org/abs/2405.17298.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por la Agencia Estatal de Investigación y el FSE+ (PID2021-123405NB-I00), y por el Departament de Recerca i Universitats (2021 SGR 00087).

Some Gaussianity criteria for Khinchin families

Víctor J. Maciá

CUNEF Universidad

victor.macia@cunef.edu

Generating functions lie at the crossroads of combinatorics, complex analysis, and probability. Given a power series $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ with non-negative coefficients and positive radius of convergence $R > 0$, we can turn the coefficients into a *Khinchin family* by declaring, for each $t \in [0, R)$, the mass function

$$\mathbb{P}(X_t = n) = \frac{a_n t^n}{f(t)}, \quad \text{for any } n \geq 1.$$

This simple prescription simultaneously encodes three objects: the combinatorial numbers a_n , the analytic function f , and a one-parameter family of probability laws $(X_t)_{t \in [0, R)}$. This prompts natural questions: *How do analytic properties of f influence the probabilistic behaviour of X_t ?* and, conversely, *what can the probabilistic properties of X_t tell us about the coefficients?*

Beyond providing a probabilistic interpretation of combinatorial sequences, the Khinchin family approach also serves as a powerful tool for asymptotic analysis: under appropriate regularity conditions, probabilistic limit theorems for (X_t) can be translated into precise asymptotic formulas for the coefficients a_n . These regularity conditions are captured by the class of strongly Gaussian power series and the class of Hayman functions. Both classes are contained within the broader class of Gaussian power series, so understanding when a power series is Gaussian is highly relevant for the theory of Khinchin families.

This talk will focus primarily on analytic criteria for Gaussianity in Khinchin families. Starting from the general framework that assigns to any power series with non-negative coefficients a family of probability laws $(X_t)_{t \in [0, R)}$, we investigate when the normalized variables converge in distribution to a standard Gaussian. In particular, we present explicit and verifiable analytical conditions, expressed in terms of derivatives of the fulcrum function associated with f , that ensure this convergence. These results allow us to deduce Gaussian behavior using only the behavior of the analytic function along the positive real axis, yielding a flexible toolkit applicable to a wide range of settings—from classical partition functions to canonical products and exponentials of entire functions of finite order.

References

- [1] Maciá, V.J.: Some Gaussianity criteria for Khinchin families. *arXiv preprint* arXiv:2501.04375 (2025).

Fluctuations of eigenvalues of random normal matrices

Joaquim Ortega Cerdà, Jordi Marzo, Leslie Molag

Department Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona

jortega@ub.edu

We consider the fluctuations of the number of eigenvalues of random normal matrices depending on a potential Q in a given set A . These eigenvalues are known to form a determinantal point process, and are known to accumulate on a compact set called the droplet under mild conditions on Q . When A is a smooth set strictly inside the droplet, we show that the variance of the number of eigenvalues N_A in A has a limiting behavior given by

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{Var } N_A = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_{\partial A} \sqrt{\Delta Q(z)} d\mathcal{H}^1(z),$$

where $d\mathcal{H}^1(z)$ denotes the 1-dimensional Hausdorff measure.

Condition number of polynomials and minimizers of Bergman and logarithmic energies

Ujué Etayo

Departamento de matemáticas, CUNEF Universidad

ujue.etayo@cunef.edu

Given a univariate polynomial with complex coefficients, the condition number of the polynomial at one of its roots quantifies how the root changes under slight perturbations of the polynomial's coefficients. This number may range from 1 (the root remains unchanged) to ∞ (the root has multiplicity greater than 1). In this talk, we present connections between condition number of polynomials and pseudopolynomials, and minimizers of Bergman and logarithmic discrete energies.

Agradecimientos. Proyecto PID2020-113887GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por la starting grant de la FBBVA asociada al premio José Luis Rubio de Francia.

Point constructions on the sphere with small discrepancy

Damir Ferizović

Department of Mathematics, KU Leuven

damir.ferizovic@kuleuven.be

In this talk we give a short summary of discrepancy (mainly on the 2-sphere) and give deterministic constructions of sequences with small L^∞ and L^p discrepancy. We will give an exact parametrization (of almost every) boundary of images of spherical caps under the Lambert cylindrical equal area map which then opens the ally to apply Complex Analytic methods to study questions of discrepancy on the 2-sphere. The point counting functional for instance is then a path integral of the Weierstrass Zeta function in case the point set under consideration is a projected lattice as has been investigated in my previous work [1].

References

- [1] D. Ferizović (2024). Spherical Cap Discrepancy of Perturbed Lattices Under the Lambert Projection. *Discrete Comput. Geom.* 71, 1352–1368 (2024).

Irregularities of distribution on compact two-point homogeneous spaces

Giacomo Gigante

Department of Management, Information and Production Engineering, University of Bergamo

giacomo.gigante@unibg.it

I will discuss recent results on the discrepancy of a generic point distribution on a compact two-point homogeneous space, with respect to geodesic balls. In particular, we are interested in lower bounds of the L^2 norm with respect to the centers of the balls, and with one (or two) fixed radius.

Acknowledgments. Joint work with D. Bilyk, L. Brandolini, B. Gariboldi, and A. Monguzzi.

Marcinkiewicz–Zygmund families and inverse problems

Bianca Gariboldi

University of Bergamo

biancamaria.gariboldi@unibg.it

Starting from the paper [1] by K. Gröchenig, where the author gives some approximation theorems, we deduce some results for inverse problems in Riemannian manifolds.

References

- [1] K. Gröchenig (2020). Sampling, Marcinkiewicz-Zygmund inequalities, approximation, and quadrature rules. *J. Approx. Theory*, 257, 105455.

Acknowledgments. Joint work with G. S. Alberti, E. De Vito, and G. Gigante.

Spherical cap discrepancy, sums of distances, and positive definite functions

Dmitriy Bilyk

University of Minnesota

dbilyk@umn.edu

Spherical cap discrepancy measures the extent of equidistribution of a discrete set of N points of the sphere and, due to the so-called Stolarsky invariance principle, is closely related to the sum of distances between points. We shall present a new proof of Beck's classical result stating that this discrepancy is always at least of the order $N^{-1/2-1/2d}$. This proof is completely elementary in nature and, unlike the other proofs, avoids using Fourier analysis or spherical harmonics/Gegenbauer polynomials. The argument is also flexible enough to provide inequalities for discrepancy in terms of various other geometric quantities, estimates for discrete Riesz energies, almost sharp constants in the discrepancy bounds, as well as new bounds for discrepancy of lines and general sets of Hausdorff dimension between 0 and d (rather than just point sets). Along the way we shall discuss some related topics that come up: positive definite functions, Welch bounds, frame energy, spherical designs, and energy minimization on the sphere.

Acknowledgments. Joint work with Johann Brauchart (TU Graz).

Hyperuniformity and the Sum Rule

Jordi Marzo

Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona

jmarzo@ub.edu

Hyperuniform random point processes have been extensively studied in both the physics and mathematics literature [1]. In Euclidean space, translation-invariant hyperuniform random point processes are characterized by reduced fluctuations. Specifically, the variance in the number of points within a domain grows more slowly than the volume of the domain. Interestingly, in the Euclidean setting, hyperuniform systems can also be characterized by a sum rule, providing an alternative definition of hyperuniformity [2]. In this talk, we will explore hyperuniformity and the sum rule across a variety of geometric settings.

References

- [1] S. Torquato (2018). Hyperuniform states of matter. *Physics Reports*, 745:1–95, 2018.
- [2] Ph. A. Martin, T. Yalcin (1980). The charge fluctuations in classical coulomb systems. *Journal of Statistical Physics*, 22(4):435–463.

Acknowledgments. Joint work with J. Antezana, M. Levi and J. Ortega-Cerdà (UB). Proyecto PID2024-160033NB-I00 financiado por MICIU/AEIMCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Optimal transport of point configurations via harmonic analysis

Bence Borda

University of Sussex, United Kingdom

b.borda@sussex.ac.uk

The theory of optimal transport and in particular the Wasserstein metric provide a natural way to measure how evenly distributed a finite point configuration is. In this talk, we present a flexible framework to estimate the Wasserstein metric using harmonic analysis on compact manifolds. We also discuss applications to both random and deterministic point sets including determinantal point processes and spherical designs.

References

- [1] B. Borda (2023). Empirical measures and random walks on compact spaces in the quadratic Wasserstein metric. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 59, 2017–2035.
- [2] B. Borda, J. Cuenin (2025). Smoothing inequalities for transport metrics in compact spaces. *Preprint*.
- [3] B. Borda, P. Grabner, R. Matzke (2024). Riesz energy, L^2 discrepancy, and optimal transport of determinantal point processes on the sphere and the flat torus. *Mathematika*, 70, Paper No. e12245, 34 pp.

Acknowledgments. Joint work with Jean-Claude Cuenin.

Points on $\mathrm{SO}(3)$ with low logarithmic energy

Pedro R. López-Gómez

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria

lopezpr@unican.es

In this talk, I will present a new general strategy to generate points with low logarithmic energy on the special orthogonal group $\mathrm{SO}(3)$, that is, the space of 3×3 orthogonal matrices with determinant 1. The main idea behind this construction is the use of the structure of $\mathrm{SO}(3)$ as fiber bundle over the two-dimensional sphere $\mathbb{S}^2$ with model fiber $\mathrm{SO}(2) \cong \mathbb{S}^1$. This allows us to generate families of well-distributed points on $\mathrm{SO}(3)$ from families of points with that property on the sphere. Following this approach, we construct different families of points on $\mathrm{SO}(3)$, all of them with low logarithmic energy. In particular, one of these constructions yields the best upper bound known to date for the logarithmic energy on this space.

References

- [1] C. Beltrán, F. Carrasco, D. Ferizović, and P.R. López-Gómez (2025). Points on $\mathrm{SO}(3)$ with low logarithmic energy. *Preprint available at* <https://arxiv.org/abs/2506.13388>.

Acknowledgments. Joint work with Carlos Beltrán, Damir Ferizović, and Federico Carrasco.

Sesión especial 29

Polinomios Ortogonales y Funciones Especiales: Teoría y Aplicaciones

Equipo organizador:

- *Francisco Marcellán Español* (Universidad Carlos III de Madrid)
- *Juan José Moreno Balcázar* (Universidad de Almería)

Descripción

En esta sesión especial se presentarán desarrollos recientes en el campo de los polinomios ortogonales y las funciones especiales, con un énfasis particular en sus aspectos analíticos y computacionales. Se explorarán también las interacciones de estas áreas con otras disciplinas fundamentales, tales como el Álgebra Lineal, las Ecuaciones Diferenciales, la Teoría de Operadores, el Análisis de Fourier y la Física Matemática. A lo largo de las 13 comunicaciones programadas, destacados especialistas abordarán estos temas desde diversas perspectivas, proporcionando una visión actualizada y multidisciplinar del estado del arte en la investigación contemporánea.

Esta sesión especial se enmarca en las actividades de la Red ORTHONET.

Palabras clave: Polinomios ortogonales; Funciones especiales; Aplicaciones.

Programa

LUNES, 19 de enero

- 15:30 – 16:00 Teresa E. Pérez (Universidad de Granada)
Operadores de tipo Bernstein sobre el simplex para parámetros negativos
- 16:00 – 16:30 Juan Antonio Villegas (Universidad de Granada)
Zonal Function Networks desde el punto de vista de la superresolución
- 16:30 – 17:00 Miguel Rojas (Universidad Complutense de Madrid)
Perturbaciones de la Medida en la Ortogonalidad Múltiple Mixta
- 17:00 – 17:30 María José Cantero (Universidad de Zaragoza)
Una conexión entre la transformación inversa de Darboux y productos de Sobolev via polinomios matriciales

MARTES, 20 de enero

- 11:00 – 11:30 Amparo Gil (Universidad de Cantabria)
Algunos problemas de inversión de funciones especiales: algoritmos numéricos e implementaciones computacionales
- 11:30 – 12:00 Ester Pérez Sinusía (Universidad de Zaragoza)
La función trascendente de Lerch: nuevos desarrollos convergentes y uniformes
- 12:00 – 12:30 Óscar Ciaurri (Universidad de La Rioja)
Funciones de Bessel, teoremas de transplatación y transferencia
- 15:30 – 16:00 Cristina Rodríguez Perales (Universidad de Almería)
Ecuación en diferencias para polinomios cuasi-ortogonales
- 16:00 – 16:30 Misael E. Marriaga (Universidad Rey Juan Carlos)
Sobre operadores escalera de orden superior para polinomios ortogonales clásicos
- 16:30 – 17:00 Juan C. García Ardila (Universidad Politécnica de Madrid)
Polinomios ortogonales generalizados de Gauss-Rys
- 17:00 – 17:30 Víctor Soto Larrosa (Universidad de Alcalá y Universidad Europea de Madrid)
Análisis semiclásico de polinomios ortogonales simétricos definidos por un peso Freud truncado
- 18:00 – 18:30 Judit Mínguez Cenicerós (Universidad de La Rioja)
Pares coherentes simétricos Dunkl de medidas positivas de segundo tipo
- 18:30 – 19:00 Antonio J. Durán (Universidad de Sevilla)
Zeros of linear combinations of orthogonal polynomials

Operadores de tipo Bernstein sobre el simplex para parámetros negativos

Teresa E. Pérez, Marlon J. Recarte

Instituto de Matemáticas y Departamento de Matemática Aplicada

tperez@ugr.es

En este trabajo estudiamos operadores de tipo Bernstein basados en el producto escalar clásico sobre el simplex de $\mathbb{R}^2$. Aparte de resultados estándar, deduciremos propiedades de derivación, y probaremos que los polinomios ortogonales clásicos sobre el simplex son las funciones propias de este operador. Además analizaremos los casos límite cuando alguno de los parámetros es un entero negativo. Finalmente, mostraremos algunos experimentos numéricos.

Referencias

- [1] M. M. Derriennic, On multivariate approximation by Bernstein-type polynomials, *J. Approx. Theory* 45 (1985), no. 2, 155–166.
- [2] D. Lara-Velasco, T. E. Pérez, Bernstein-type operators preserving derivatives, *Comput. Appl. Math.* 43 (2024), no. 277.
- [3] G. G. Lorentz, *Bernstein polynomials*, Chelsea Publishing Company, New York, 1997.

Agradecimientos. Participación financiada por el Proyecto *Aproximación Multivariada con Aplicaciones*, PID2023.149117NB.I00.

Zonal Function Networks desde el punto de vista de la superresolución

Juan Antonio Villegas, Hrushikesh N. Mhaskar, Andrei Martínez-Finkelshtein

Instituto de Matemáticas (IMAG) y Departamento de Matemática Aplicada,
Universidad de Granada

jantoniovr@ugr.es

Dada una función par $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre la esfera unitaria, asumimos que f tiene una forma específica (o puede ser aproximada mediante una expresión de esta forma), llamada *Zonal Function Network* (ZF-Network o ZFN):

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^K d_i G(\mathbf{x}, y_i^*), \quad \text{con } G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|^{2\gamma+1}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y}, y_1^*, \dots, y_K^* \in \mathbb{S}^2,$$

donde $\gamma > -1/2$ es conocido y $2\gamma + 1$ no es un entero par. Nuestro objetivo es determinar el valor de los coeficientes d_i y los puntos y_i^* , $i = 1, \dots, K$, a partir de una muestra discreta $\{(x_j, f(x_j))\}_{j=1}^N$, $x_j \in \mathbb{S}^2$.

Este problema puede ser abordado de diversas formas, pero en esta charla principalmente utilizaremos técnicas de aproximación basadas en el uso de esféricos armónicos y sus propiedades, así como de funciones kernel localizadas, centrándonos en las bases teóricas de esta metodología y mostrando ejemplos e implementaciones prácticas.

Usaremos la muestra de puntos y fórmulas de cubatura para definir una función que indica la localización de los centros $\{y_i^*, i = 1, \dots, K\}$ y nos ayuda a calcular el valor de los coeficientes $\{d_i, i = 1, \dots, K\}$. Finalmente, presentaremos algunos ejemplos numéricos que ilustran la efectividad de la metodología propuesta.

Referencias

- [1] K. Atkinson, W. Han (2012) *Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction*. Springer.
- [2] Q. T. Gia, H. N. Mhaskar (2008). Localized Linear Polynomial Operators and Quadrature Formulas on the Sphere. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47, 440–466.
- [3] H.N. Mhaskar, R. O'Dowd (2025). Learning on manifolds without manifold learning. *Neural Networks*, 181.
- [4] H. N. Mhaskar (2020). Kernel-based analysis of massive data. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, 6.
- [5] H. N. Mhaskar (2019). Function approximation with zonal function networks with activation functions analogous to the rectified linear unit functions. *Journal of Complexity*, 51, 1–19.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por el proyecto “PID2023-149117NB-I00”, del Ministerio de Ciencia e Innovación y FEDER, y el proyecto IMAG-María de Maeztu “CEX 2020-001105-M”, de “MCIN/AEI/10.13039/501100011033”.

Perturbaciones de la Medida en la Ortogonalidad Múltiple Mixta

Miguel Rojas, Manuel Mañas

Departamento de Física Teórica, Universidad Complutense de Madrid

migroj01@ucm.es

En esta charla, enfatizamos el papel decisivo del análisis matricial en el estudio de los polinomios ortogonales. La teoría de los polinomios ortogonales clásicos y el análisis matricial surgen naturalmente en el estudio de las matrices tridiagonales (matrices de Jacobi), cuyo espectro, bajo ciertas condiciones, coincide con el soporte de una medida asociada a una sucesión de polinomios ortogonales. Además, la factorización de Gauss-Borel de la matriz de momentos desempeña un papel fundamental en la caracterización de la ortogonalidad y en el descubrimiento de propiedades estructurales clave.

Nos centramos en los MMOP (polinomios ortogonales con respecto a una matriz de medidas). En este caso, la matriz de Jacobi asociada es una matriz banda, donde el número de diagonales no nulas depende del tamaño de la matriz de la medida. Dentro de este marco, estudiamos cómo se transforman los polinomios ortogonales cuando la matriz de medidas experimenta perturbaciones polinomiales matriciales. La perturbación más general que consideramos sigue la forma de Uvarov:

$$d\tilde{\mu}(x)R(x) = L(x)d\mu(x),$$

donde $R(x)$, $L(x)$ son matrices polinomiales, $d\mu(x)$ es la matriz de medidas original, y $d\tilde{\mu}(x)$ la correspondiente matriz de medidas perturbada. Tomando $R(x) = I$ o $L(x) = I$, obtenemos una perturbación de Christoffel o de Geronimus, respectivamente.

La principal contribución de nuestro trabajo es la generalización de estas perturbaciones más allá de polinomios matriciales diagonales, extendiendo la teoría para incluir casos con matrices principales no mónicas. Esta generalización conduce a un análisis de las propiedades espectrales de los polinomios matriciales de la perturbación. Además, reducimos el problema de garantizar la ortogonalidad a un problema de álgebra lineal que involucra la compatibilidad de ciertos sistemas de ecuaciones lineales.

Referencias

- [1] M. I. Bueno and F. Marcellán, *Darboux transformation and perturbation of linear functionals*, Linear Algebra and its Applications 384 (2004) 215-242.
- [2] M. Mañas and M. Rojas, *General Christoffel Perturbations for Mixed Multiple Orthogonal Polynomials*, [arXiv:2405.11630](https://arxiv.org/abs/2405.11630).
- [3] M. Mañas and M. Rojas, *General Geronimus Perturbations for Mixed Multiple Orthogonal Polynomials*, Analysis and Mathematical Physics 15, article number 50 (2025).

Agradecimientos. Los autores agradecen el financiamiento por parte del proyecto de investigación [PID2021-122154NB-I00], *Ortogonalidad y Aproximación con Aplicaciones en Machine Learning y Teoría de la Probabilidad*, financiado por, MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por “ERDF A Way of making Europe”.

Una conexión entre la transformación inversa de Darboux y productos de Sobolev via polinomios matriciales

M.J. Cantero, L. Moral, L. Velázquez

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

mjcante@unizar.es

La transformación directa de Darboux de una matriz CMV conduce a una nueva matriz también CMV. Sin embargo la transformación inversa de Darboux no siempre da lugar a otra matriz CMV, sino a ciertas soluciones relativas a productos tipo Sobolev discretos.

En esta charla se establece una conexión entre Polinomios Ortogonales en la circunferencia unidad con respecto a un producto tipo Sobolev discreto y Polinomios Matriciales en la recta real que clarifica la conexión entre la transformación inversa de Darboux para matrices CMV y productos tipo Sobolev discretos.

Se muestra cómo dicha conexión además permite trasladar el problema de obtener las soluciones de la transformada inversa de Darboux en la circunferencia unidad a un problema de Geronimus matricial en la recta real.

Agradecimientos. Trabajo financiado por la ayuda PID2021–124472NB–I00 del proyecto financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y “FEDER Una manera de hacer Europa”.

Algunos problemas de inversión de funciones especiales: algoritmos numéricos e implementaciones computacionales

Amparo Gil, Javier Segura, Nico M. Temme

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación, Universidad de Cantabria

amparo.gil@unican.es

En esta charla discutiremos estrategias asintóticas y numéricas esenciales para la construcción de algoritmos recientes desarrollados por nuestro grupo, orientados a la resolución de diversos problemas de inversión asociados a funciones especiales.

La función trascendente de Lerch: nuevos desarrollos convergentes y uniformes

Ester Pérez Sinusía, José L. López

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

`ester.perez@unizar.es`

La función trascendente de Lerch $\Phi(z, s, a)$ desempeña un papel importante en diversas áreas de las matemáticas y la física, con aplicaciones notables en la mecánica estadística y la teoría cuántica de campos. En este contexto, resulta especialmente relevante obtener nuevas representaciones de $\Phi(z, s, a)$ que sean útiles tanto desde un punto de vista analítico como computacional.

En este trabajo, presentamos desarrollos convergentes novedosos de $\Phi(z, s, a)$ en términos de funciones elementales que son uniformes en la variable z . Tomando como punto de partida la representación integral

$$\Phi(z, s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1 - ze^{-x}} dx,$$

válida para $\Re(s) > 0$, $\Re(a) > 0$ si $z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$, aplicamos dos métodos analíticos distintos, ambos basados en desarrollos de Taylor multipunto que permiten aproximar transformadas integrales de la forma:

$$F(z) = \int_0^1 h(t, z) g(t) dt.$$

Finalmente, se incluyen diversos experimentos numéricos que ilustran la precisión de las nuevas aproximaciones, así como comparaciones con otros desarrollos conocidos [1].

Referencias

- [1] J. L. López, E. Pérez Sinusía (2025). New analytic representations of the Lerch transcendent. *Numer Algor*, <https://doi.org/10.1007/s11075-025-02113-w>.

Funciones de Bessel, teoremas de transplatación y transferencia

Óscar Ciaurri

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

oscar.ciaurri@unirioja.es

Es bien conocido que las funciones especiales juegan un importante papel en algunos aspectos del análisis armónico. Un ejemplo clásico son las funciones de Bessel de primer tipo, que se convierten en el núcleo de la transformada de Fourier cuando actúa sobre funciones radiales. En esos casos suele hablarse de transformada de Hankel. En esta charla mostraremos un resultado sobre acotación uniforme del operador de transplatación para la transformada de Hankel (vinculado a las funciones hipergeométricas, otra familia clásica de funciones especiales) y veremos que da lugar a un teorema de transferencia para multiplicadores de la transformada de Fourier. Estos resultados se ven en [1].

Referencias

- [1] Ó. Ciaurri (2025). Uniform weighted inequalities for the Hankel transform transplantation operator. *Preprint*, arXiv:2501.06152.

Ecuación en diferencias para polinomios cuasi-ortogonales

Cristina Rodríguez-Perales, Galina Filipuk, Juan F. Mañas-Mañas, Juan J. Moreno-Balcázar

Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería

crp170@ual.es

En esta charla se pretende obtener la ecuación en diferencias de segundo orden que satisfacen los polinomios cuasi-ortogonales de primer orden $s_n(x)$, dados por $s_n(x) = p_n(x) + c_n p_{n-1}(x)$, donde $p_n(x)$ son los polinomios ortonormales relacionados con el operador de Hahn y c_n es una sucesión de constantes.

Para ello, como paso preliminar se comienza obteniendo los operadores escalera, conocidos en la literatura como *ladder operators*, para los polinomios $p_n(x)$. Dichos operadores nos permiten establecer la ecuación en diferencias de segundo orden para estos polinomios, unificando algunos resultados conocidos en la literatura. Finalmente, se ilustran los resultados obtenidos para dos familias de polinomios concretas: cuasi-Krawtchouk y cuasi-little q -Laguerre.

Referencias

- [1] Y. Chen, M.E.H. Ismail (1997). Ladder operators and differential equations for orthogonal polynomials. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 30 , 7918–7829.
- [2] G. Filipuk, J. F. Mañas-Mañas, J. J. Moreno-Balcázar, C. Rodríguez-Perales. Second-order difference equation for quasi-orthogonal polynomials related to Hahn difference operator. *Enviado*.
- [3] M.E.H. Ismail, X.S. Wang (2019). On quasi-orthogonal polynomials: Their differential equations, discriminants and electrostatics. *J. Math. Anal. Appl.*, 474 , 1178–1197.

Agradecimientos. Trabajo financiado por la ayuda PPIT-UAL, Junta de Andalucía-FSE. Programa: 54.A. Aplicación 741; por la ayuda PID2021-124472NB-I00 del proyecto financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y “FEDER Una manera de hacer Europa”; Centro de Investigación CDTIME y Grupo de Investigación FQM-0229 de la Universidad de Almería.

Sobre operadores escalera de orden superior para polinomios ortogonales clásicos

Misael E. Marriaga, Javier Martínez

Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de Materiales y Tecnología Electrónica, Universidad Rey Juan Carlos

`misael.marriaga@urjc.es`

Analizamos la estructura algebraica de los operadores escalera de orden superior para los polinomios ortogonales clásicos (Hermite, Laguerre, Jacobi, Bessel) en términos de sus funcionales de momentos y de dos operadores escalera de primer orden, J_n^+ y J_n^- . Estudiamos expresiones operacionales de estos operadores escalera mediante ciertos operadores integro-diferenciales.

Agradecimientos. MEM agradece el proyecto de investigación [PID2021-122154NB-I00], *Ortogonalidad y Aproximación con Aplicaciones en Machine Learning y Teoría de la Probabilidad*, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por “ERDF A Way of making Europe”. MEM y JM agradecen el convenio plurianual de la Comunidad de Madrid con la Universidad Rey Juan Carlos en el marco de los Proyectos I+D para Jóvenes Doctores, Ref. M2731, proyecto NETA-MM.

Polinomios ortogonales generalizados de Gauss-Rys

Juan C. García-Ardila, Francisco Marcellán

Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial,
Universidad Politécnica de Madrid

juancarlos.garciaa@upm.es

Sea $(P_n(x; z; \lambda))_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al funcional lineal simétrico $\mathbf{u}$ definido por

$$\langle \mathbf{u}, p \rangle = \int_{-1}^1 p(x)(1-x^2)^{(\lambda-1/2)} e^{-zx^2} dx, \quad \lambda > -1/2, \quad z > 0.$$

Mediante el análisis de los parámetros de la relación de recurrencia de tres términos que satisfacen los polinomios $(P_n(x; z; \lambda))_{n \geq 0}$, mostramos algunos resultados interesantes como los desarrollos asintóticos de estos coeficientes o las ecuaciones discretas de Painlevé y de Painlevé asociadas a ellos. Finalmente, se ofrece una interpretación electrostática de los ceros de dichos polinomios, así como la dinámica de los ceros en términos de los parámetros z y λ .

Referencias

- [1] C. M. Cosgrove, *Chazy's second-degree Painlevé equations*, J. Phys. A 39 (2006), 11955-11971.
- [2] D. Dominici, F. Marcellán *Truncated Hermite polynomials*, J. Difference Equ. Appl. 29(2023), no.7, 701–732.
- [3] J. C. García-Ardila, F. Marcellán, *Generalized Gauss-Rys orthogonal polynomials*, J. Math. Anal. Appl. 540, 2, 128695, 23 pp. (2024).
- [4] M. E. H Ismail *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*. With two chapters by Walter Van Assche. With a foreword by Richard A. Askey Encyclopedia Math. Appl., 98 Cambridge University Press, Cambridge, 2005. xviii+706 pp.
- [5] A. Ramani, B. Grammaticos, *Miura transforms for discrete Painlevé equations*. J. Phys. A 25 (1992), L633–L637

Agradecimientos. Este trabajo ha sido financiado por la Comunidad de Madrid junto con la Universidad Rey Juan Carlos bajo el proyecto I+D para Jóvenes Doctores, Ref. M2731. La investigación de Francisco Marcellán ha sido financiada por el proyecto de investigación PID2021- 122154NB-I00 *Ortogonalidad y Aproximación con Aplicaciones en Machine Learning y Teoría de la Probabilidad* del MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por “ERDF A Way of making Europe”.

Análisis semiclásico de polinomios ortogonales simétricos definidos por un peso Freud truncado

Víctor Soto-Larrosa, Edmundo J. Huertas, Alberto Lastra, Francisco Marcellán

Departamento de Biocencias, Universidad Europea de Madrid / Departamento de Física y Matemáticas. Universidad de Alcalá

victor.soto@universidadeuropea.es / v.soto@uah.es

Se introduce y estudia una familia de polinomios ortogonales simétricos $P_n(x; z)$, definidos sobre el intervalo simétrico finito $[-z, z]$ con $z > 0$ y ortogonales con respecto al peso e^{-x^4} . Estos polinomios están asociados a un funcional lineal semiclásico de clase cuatro y presentan propiedades estructurales y asintóticas de gran interés. Se caracterizan los coeficientes $\gamma_n(z)$ de la relación de recurrencia a tres términos, se analizan los momentos asociados a la medida y se deduce la función de Stieltjes correspondiente. A partir de los operadores de subida y bajada se obtiene una ecuación diferencial lineal de segundo orden satisfecha por esta familia. Asimismo, se proporciona una interpretación electrostática de sus ceros y se estudia su comportamiento dinámico en función del parámetro de truncación z . Este trabajo conecta la ortogonalidad truncada con la teoría semiclasica y las ecuaciones de recurrencia no lineales, y contribuye a una mejor comprensión de las familias de polinomios sobre intervalos acotados.

Referencias

- [1] S. M. Alsulami, P. Nevai, J. Szabados, W. Van Assche (2015). A family of nonlinear difference equations: Existence, uniqueness, and asymptotic behavior of positive solutions. *J. Approx. Theory*, 193, 39–55.
- [2] S. Belmechdi (1992). On semiclassical linear functionals of class $s = 1$. Classification and integral representations. *Indag. Math. (N. S.)*, 3, 253–275.
- [3] S. Belmechdi, A. Ronveaux (1994). Laguerre-Freud's equations for the recurrence coefficients of semi-classical orthogonal polynomials. *J. Approx. Theory*, 76(3), 351–358.
- [4] Y. Chen, M. E. H. Ismail (1997). Ladder operators and differential equations for orthogonal polynomials. *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 30, 7818–7829.
- [5] W. Van Assche (2022). Orthogonal polynomials, Toda lattices and Painlevé equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 193, 39–55.

Agradecimientos. La investigación de Francisco Marcellán ha sido financiada por el proyecto de investigación PID2021- 122154NB-I00 *Ortogonalidad y Aproximación con Aplicaciones en Machine Learning y Teoría de la Probabilidad* del MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por “ERDF A Way of making Europe”.

Pares coherentes simétricos Dunkl de medidas positivas de segundo tipo

Judit Mínguez Ceniceros, Francisco Marcellán

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

judit.minguez@unirioja.es

Sean dos funcionales lineales simétricos $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ tales que sus correspondientes sucesiones de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n(x; \mathbf{u})\}_{n \geq 0}$ y $\{P_n(x; \mathbf{v})\}_{n \geq 0}$ están relacionados por

$$\frac{T_\mu P_{n+1}(x; \mathbf{u})}{\mu_{n+1}} = P_n(x; \mathbf{v}) - \tau_{n-1} P_{n-2}(x; \mathbf{v}), \quad \tau_{n-1} \neq 0, \quad n \geq 2,$$

donde T_μ es el operador Dunkl en una variable. Este par de funcionales lineales se dice par T_μ -coherente simétrico de segundo tipo. En este trabajo probamos las condiciones necesarias y suficientes que tiene que cumplir un par de funcionales simétricos $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ para que sea T_μ -coherente de segundo tipo. Además, damos una descripción completa de estos funcionales y mostramos como ejemplos aquellos en los que uno de los funcionales es T_μ -clásico (medida generalizada de Gegenbauer o medida generalizada de Hermite).

Agradecimientos. La investigación de Francisco Marcellán ha sido financiada por el proyecto de investigación PID2021- 122154NB-I00 *Ortogonalidad y Aproximación con Aplicaciones en Machine Learning y Teoría de la Probabilidad* del MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por “ERDF A Way of making Europe”. La investigación de Judit Mínguez Ceniceros ha sido financiada por el proyecto de investigación PID2021-124332NB-C22 *Funciones especiales, aproximación y aplicaciones* del MICIU/AEI.

Zeros of linear combinations of orthogonal polynomials

Antonio J. Durán

Departamento de Análisis Matemático e IMUS, Universidad de Sevilla

duaran@us.es

Given a sequence of orthogonal polynomials $(p_n)_n$ with respect to a positive measure in the real line, we study the real zeros of finite combinations of $K + 1$ consecutive orthogonal polynomials of the form

$$q_n(x) = \sum_{j=0}^K \gamma_j p_{n-j}(x), \quad n \geq K,$$

where $\gamma_j, j = 0, \dots, K$, are real numbers with $\gamma_0 = 1, \gamma_K \neq 0$ (which do not depend on n). We prove that for every positive measure μ there always exists a sequence of orthogonal polynomials with respect to μ such that all the zeros of the polynomial q_n above are real and simple for $n \geq n_0$, where n_0 is a positive integer depending on K and the γ_j 's.

Applications to the classical families of orthogonal polynomials will be considered.

Sesión especial 30

Red Española de Topología

Equipo organizador:

- *Ramón Jesús Flores Díaz* (Universidad de Sevilla)
- *Aniceto Murillo Mas* (Universidad de Málaga)

Descripción

La Red Española de Topología (RET) reúne a una comunidad de especialistas cuyas investigaciones se articulan en torno a ideas topológicas, ya sea desde una perspectiva teórica o aplicada. Como en ocasiones anteriores, la sesión que se plantea busca mostrar una selección de trabajos recientes que ilustran la variedad y riqueza de enfoques presentes en la RET. Se incluirán contribuciones que exploran aplicaciones novedosas de la topología junto a desarrollos más abstractos. También habrá espacio para investigaciones en líneas más consolidadas como la homotopía, las singularidades o la topología diferencial. Esta diversidad no solo refleja la amplitud del campo, sino también su capacidad para generar conexiones con otras áreas de las matemáticas y más allá. La sesión aspira a ser un punto de encuentro para compartir avances, ideas y perspectivas que alimentan el crecimiento continuo de la RET.

Palabras clave: Topología algebraica; Topología aplicada; Topología diferencial;

Programa

JUEVES, 22 de enero

11:00 – 11:30	Antonio Viruel (Universidad de Málaga) <i>Realizando conjuntos de enteros como grados entre variedades</i>
11:30 – 12:00	María Pe Pereira (Universidad Complutense) <i>Una teoría para estudiar degeneraciones métricas: Topología Algebraica Moderadamente Discontinua</i>
12:00 – 12:30	José Manuel García Calcines (Universidad de La Laguna) <i>Nuevas perspectivas sobre la categoría seccional relativa</i>
12:30 – 13:00	Daniel Hernández Serrano (Universidad de Salamanca) <i>Complejos simpliciales y aplicaciones: resiliencia topológica en redes</i>
16:00 – 16:30	David Mosquera (Universidad de Vigo) <i>Integración con respecto al número de Lefschetz</i>
16:30 – 17:00	Alejandra Garrido (Universidad Complutense de Madrid) <i>Grupos simples localmente compactos totalmente desconexos</i>
17:00 – 17:30	Raúl Oset Sinha (Universidad de Valencia) <i>Avances recientes sobre la conjetura de Mond</i>
18:00 – 18:30	Nuria Corral (Universidad de Cantabria) <i>Invariantes analíticos de cúspides y transversalidad polar</i>
18:30 – 19:00	O'Bryan Cárdenas-Andaur (Universidad de Sevilla) <i>Algunos resultados sobre polinomios corchete</i>

Realizando conjuntos de enteros como grados entre variedades

Antonio Viruel

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga

viruel@uma.es

En esta charla consideraremos el problema de realizabilidad de conjuntos de enteros como conjuntos de grados entre variedades diferenciales. Esto es, dado un conjunto A de enteros, nos preguntamos si existen variedades diferenciales N y M de la misma dimensión tales que $\deg(N, M) = A$, en cuyo caso diremos que A es realizable. Obviamente, para que A sea realizable es necesario que A contenga el 0, pero observaremos que no todo conjunto de enteros que contiene el 0 es realizable. Mostraremos que todo conjunto finito de enteros conteniendo 0 es realizable. En lo que se refiere a conjuntos infinitos, veremos que toda secuencia aritmética generalizada (unión de sucesiones aritméticas estándar) es realizable si sus términos poseen todos el mismo signo.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Cristina Costoya y Vicente Muñoz

Una teoría para estudiar degeneraciones métricas: Topología Algebraica Moderadamente Discontinua

María Pe Pereira

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad Complutense

maria.pe@mat.ucm.es

Así como la topología algebraica proporciona un lenguaje para hablar sobre las propiedades de los espacios topológicos salvo homeomorfismo (más precisamente, salvo homotopía), nosotros presentamos una teoría para hablar sobre degeneraciones métricas, que codifica en particular información métrica y dinámica.

En los trabajos [1] y [2] desarrollamos una teoría que se aplica a gérmenes analíticos/algebraicos y que proporciona invariantes analíticos. Los primeros ejemplos incluyen el cálculo para singularidades de curvas planas, en las que el invariante da los exponentes de Puiseux, o para singularidades normales de superficies, a partir de las cuales se puede obtener información sobre una resolución concreta de singularidades que codifica la métrica interna salvo homeomorfismo bilipschitz.

En el marco de [1] y [2] imponemos una hipótesis subanalítica (que, dicho de forma general, equivale a pedir que los espacios y aplicaciones sean PL). En un trabajo en curso estamos ampliando el marco de la teoría a familias continuas de espacios métricos. En esta charla hablaré sobre esta nueva versión. En particular, esto permite que la teoría exprese propiedades de degeneraciones muy generales de espacios métricos, tales como degeneraciones de métricas riemannianas.

Referencias

- [1] J. Fernández de Bobadilla, S. Heinze, M. Pe Pereira, E. Sampaio (2022). Moderately Discontinuous Homology. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 75, 2123–2200. También disponible en arXiv:1910.12552v3
- [2] J. Fernández de Bobadilla, S. Heinze, M. Pe Pereira (2022), Moderately Discontinuous Homotopy. *International Mathematics Research Notices*, 23, 18346–18400. También disponible en ArXiv:2007.01538.

Nuevas perspectivas sobre la categoría seccional relativa

José Manuel García Calcines

Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa,
Universidad de La Laguna

jmgarcial@ull.edu.es

El concepto de categoría seccional relativa amplía la teoría clásica de la categoría seccional incorporando el pullback de una fibración a lo largo de una aplicación continua. Nuestro trabajo no solo pretende explorar esta extensión, sino también investigar en profundidad sus propiedades. Buscamos descubrir cómo la categoría seccional relativa unifica diversos invariantes numéricos homotópicos aparecidos recientemente en la literatura. Entre ellos se incluyen la complejidad topológica de aplicaciones según Murillo–Wu o Scott, la complejidad topológica relativa definida por Farber, y la distancia homotópica para aplicaciones continuas en el sentido de Macías-Virgós y Mosquera-Lois, entre otros.

Complejos simpliciales y aplicaciones: resiliencia topológica en redes

Daniel Hernández Serrano

Departamento de Matemáticas, Universidad de Salamanca

dani@usal.es

Los complejos simpliciales son objetos que permiten modelar interacciones de orden superior en redes, permitiendo capturar relaciones entre grupos de más de dos agentes. En esta charla hablaremos de estos objetos combinatorios, su papel en el análisis topológico de datos (TDA) mediante homología persistente, y una reciente extensión que introduce nuevos números de Betti capaces de cuantificar la resiliencia estructural de agujeros topológicos frente a perturbaciones o ataques. Esta perspectiva potencia el alcance de la topología algebraica computacional, con aplicaciones emergentes en áreas como la oncología y la neurociencia.

Integración con respecto al número de Lefschetz

David Mosquera

Departamento de Matemáticas, Universidad de Vigo

david.mosquera.lois@uvigo.gal

En esta charla abordamos la integración con respecto a "medidas topológicas" algunas de sus aplicaciones. Comenzamos analizando la integración respecto a la característica de Euler-Poincaré y sus implicaciones en problemas de conteo. Sobre esta base, introducimos la integración con respecto a otras "medidas topológicas", como el número de Lefschetz, explorando las consecuencias de esta teoría en diversos contextos matemáticos y aplicados.

Grupos simples localmente compactos totalmente desconexos

Alejandra Garrido

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad Complutense de Madrid

agarri17@ucm.es

Desde comienzos de este siglo, ha habido un interés creciente en los grupos localmente compactos totalmente desconexos (tdlc), y está empezando a emerger una teoría estructural al respecto. Un papel especial lo desempeña la clase S de grupos tdlc que son compactamente generados, topológicamente simples y no discretos. Si se pretende algún tipo de clasificación de estos grupos, hay que entender primero más ejemplos concretos.

Los grupos completos de homeomorfismos del espacio de Cantor son una fuente rica de grupos simples. En un trabajo conjunto con Colin Reid, se muestra que, dadas las condiciones adecuadas sobre el grupo "semilla", el grupo completo puede dotarse de una topología localmente compacta y totalmente desconexa, y contiene un subgrupo grande simple y compactamente generado. Un ejemplo de esto es el grupo de Neretin de cuasi-automorfismos de un árbol. En la charla se presentarán más ejemplos.

También se muestra que esta construcción da cuenta de todos los grupos de uno de los cinco tipos de grupos en la clase S , salvo isomorfismo local (el análogo totalmente desconexo de tener el mismo álgebra de Lie en el caso conexo).

No se asumirá conocimiento previo sobre grupos topológicos para esta charla.

Avances recientes sobre la conjetura de Mond

Raúl Oset Sinha

Departamento de Matemáticas, Universidad de Valencia

raul.oset@uv.es

La conjetura de Mond es una conjetura tipo número de Milnor (μ) vs número de Tjurina (τ) pero para aplicaciones holomorfas $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ en lugar de funciones. Establece que la codimensión del germen es menor o igual que el número de Milnor de la imagen, con igualdad en el caso cuasi-homogéneo. Esto es una relación entre un invariante algebraico y un invariante topológico. Explicaremos los elementos necesarios para poder enunciar la conjetura y hablaremos de las recientes resoluciones para el caso de aumentaciones de singularidades (trabajo conjunto con I. Breva Ribes) y el caso de frentes de ondas (trabajo conjunto con C. Muñoz-Cabello y J. J. Nuño-Ballesteros).

Invariantes analíticos de cúspides y transversalidad polar

Nuria Corral

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria

nuria.corral@unican.es

El semimódulo de valores diferenciales de una curva C es un invariante analítico clave en la clasificación analítica de curvas planas. Dicho semimodulo se obtiene a partir de los valores diferenciales de 1-formas. Una base estándar de la curva C está formada por 1-formas que determinan un sistema minimal de generadores del semimodulo. En el caso de cúspides, las 1-formas de la base estándar definen foliaciones dicríticas en el divisor cuspidal determinado por la curva C . Estas foliaciones dicríticas nos permiten definir las semirraíces analíticas de la curva cuyos semimodulos de valores diferenciales aproximan el de la curva de partida, en el sentido que se obtienen como una truncación del semimódulo inicial.

En este trabajo estudiamos bajo qué condiciones es posible determinar el semimódulo de valores diferenciales de las curvas invariantes de una foliación dicrítica en el divisor cuspidal. Estas condiciones están determinadas por la curva jacobiana de la foliación y las foliaciones definidas por las 1-formas de la base estándar.

Algunos resultados sobre polinomios corchete

O'Bryan Cárdenas-Andaur

Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla

obryan.cardenas.12@sansano.usm.cl

En el año 2000, Mikhail Khovanov introdujo el primer invariante homológico para nudos y enlaces, hoy conocido como *homología de Khovanov*. Dicho invariante constituye una categorificación del polinomio de Jones y es más fino que este, pues aporta abundante información acerca de las propiedades geométricas y topológicas del enlace. En particular, proporciona una cota para el género *slice* de un nudo y permitió dar una prueba combinatoria de la conjetura de Milnor (anteriormente demostrada mediante teoría de gauge). Más recientemente se ha demostrado que la homología de Khovanov detecta el nudo trivial, problema que sigue abierto para el polinomio de Jones.

Por otro lado, Aicardi y Juyumaya presentaron en 2016 los *enlaces ligados* (*tied links*), los cuales constituyen una generalización no trivial de los enlaces clásicos. Asimismo, definieron invariantes polinomiales para estos nuevos objetos; en particular, en 2018 introdujeron el invariante $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$, que se especializa en el corchete de Kauffman y permite construir, mediante el método de Kauffman, una extensión del polinomio de Jones para enlaces ligados.

Esta charla se presentarán (i) resultados obtenidos en vía de definir una *versión “ligada” de la homología de Khovanov* y las complejidades que esto conlleva, y (ii) resultados y conjeturas sobre la búsqueda de invariantes para enlaces ligados anulares. Los primeros resultados fueron obtenidos en colaboración con J. González-Meneses y M. Silvero; los segundos, son parte de un trabajo en curso con Á. del Valle Vélchez.

Referencias

- [1] Francesca Aicardi and Jesús Juyumaya. *Tied Links*. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 25(09):1650061, 2016.
- [2] Francesca Aicardi and Jesús Juyumaya. *Kauffman type invariants for tied links*. *Mathematische Zeitschrift*, 289:567–591, 2018.
- [3] O'Bryan Cárdenas-Andaur. *On the Aicardi–Juyumaya bracket for tied links*. Preprint, [arXiv:2411.06259](https://arxiv.org/abs/2411.06259), 2024.
- [4] Mikhail Khovanov. *A categorification of the Jones polynomial*. *Duke Mathematical Journal*, 101(3):359–426, 2000.
- [5] Peter B. Kronheimer and Tomasz S. Mrowka. *Khovanov homology is an unknot detector*. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 113:97–208, 2011.

Sesión especial 31

Resolución numérica de problemas de propagación de ondas

Equipo organizador:

- *Manuel Pena* (Universidad de Vigo)
- *Virginia Selgas Buznego* (Universidad de Oviedo)

Descripción

La propagación de ondas tiene un papel clave en multitud de fenómenos físicos: desde la escala micro o subatómica a la macro de todo el universo observable, pasando por la escala humana (sonidos, vibraciones, olas, óptica...). En la actualidad presentan aplicaciones en una gran variedad de campos de ciencia e ingeniería, tales como telecomunicaciones, técnicas de imagen y diversos procesos industriales. El objetivo de esta sesión especial es la discusión de avances recientes en la simulación de problemas directos e inversos relativos a la propagación de ondas, de manera que se establezcan y fortalezcan lazos de colaboración entre distintos grupos de investigación españoles. La sesión tratará de abordar diversas cuestiones sobre el desarrollo de estudios teóricos y numéricos relacionados con la propagación de ondas de tipo mecánico (en particular, elásticas y acústicas) o electromagnético. Los temas de interés abordados en esta sesión incluyen los relativos a técnicas de modelización, análisis y simulación numérica así como aplicaciones industriales, entre otros.

Palabras clave: simulación numérica; propagación de ondas; análisis numérico.

Programa

JUEVES, 22 de enero

- | | |
|---------------|--|
| 12:00 – 12:30 | Jerónimo Rodríguez (Universidad de Santiago de Compostela)
<i>Estabilidad de integradores temporales para sistemas lineales de Friedrichs</i> |
| 12:30 – 13:00 | Víctor Domínguez (Universidad Pública de Navarra)
<i>Nyström Discretizations of Helmholtz Decomposition BIEs for 2D Elastic Wave Scattering</i> |
| 15:30 – 16:00 | Virginia Selgas (Universidad de Oviedo)
<i>Análisis de un método de Trefftz para la simulación de la propagación de ondas en el espacio libre</i> |
| 16:00 – 16:30 | Manuel Pena (Universidad de Vigo)
<i>Implementación de un método de Trefftz para la resolución de la ecuación de Helmholtz en una guía de ondas</i> |
| 16:30 – 17:00 | Pilar Salgado (Universidad de Santiago de Compostela)
<i>Análisis matemático y numérico de un problema termo-electromagnético axisimétrico</i> |

VIERNES, 23 de enero

- | | |
|---------------|---|
| 11:00 – 11:30 | María-Luisa Rapún (Universidad Politécnica de Madrid)
<i>Processing poor experimental databases for object detection by topological derivative based methods</i> |
| 11:30 – 12:00 | Claudiu Placinta (Universidad Politécnica de Madrid)
<i>Topological derivative methods for identifying elastic scatterers in industrial problems</i> |
| 12:00 – 12:30 | Ana Carpio (Universidad Complutense de Madrid)
<i>Problemas inversos Bayesianos en geofísica</i> |

Estabilidad de integradores temporales para sistemas lineales de Friedrichs

Jerónimo Rodríguez, Sébastien Imperiale, Patrick Joly

Departamento de Matemática Aplicada y CITMAga, Universidade de Santiago de Compostela

jeronimo.rodriguez@usc.es

En el presente trabajo discutimos varios resultados teóricos de estabilidad fuerte de integradores Runge-Kutta de s etapas y orden s aplicados a discretizaciones de tipo Galerkin-discontinuo de sistemas lineales hiperbólicos simétricos en el sentido de Friedrichs. Restringimos el estudio al caso de sistemas conservativos y para problemas de Cauchy. Los resultados se compararán con aquellos en las referencias [1, 2, 3, 4].

Referencias

- [1] D. Levy, E. Tadmor. (1998). From semidiscrete to fully discrete: Stability of Runge–Kutta schemes by the energy method. *SIAM Review*.
- [2] Z. Sun, C.-W. Shu. (2017) Stability of the fourth order Runge–Kutta method for time-dependent partial differential equations. *Annals of Mathematical Sciences and Applications*.
- [3] Z. Sun, C.-W. Shu. (2019). Strong stability of explicit Runge–Kutta time discretizations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*.
- [4] E. Tadmor. (2002). From semidiscrete to fully discrete: Stability of Runge–Kutta schemes by the energy method. ii. *Proceedings in Applied Mathematics, SIAM*.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por la Xunta de Galicia a través del proyecto 2021 GRC GI-1563 ED431C 2021/15 y por el *Ministerio de Ciencia Innovación y Universidades* (MCIN/AEI/10.13039/501100011033/FEDER) por el proyecto PID2021-122625OB-I00.

Nyström Discretizations of Helmholtz Decomposition BIEs for 2D Elastic Wave Scattering

Víctor Domínguez, Catalin Turc

Dep. Estadística, Matemática e Informática, Universidad Pública de Navarra

`victor.dominguez@unavarra.es`

Boundary Integral Equations (BIEs) are powerful tools for solving scattering problems in unbounded domains, in both two and three dimensions. In this work, we focus on two-dimensional elastic wave scattering governed by the Navier equations, and approach its solution through BIE formulations. Rather than relying on classical methods based on the fundamental solution of elastodynamics, we employ a Helmholtz decomposition of the displacement field. This representation expresses the solution as the sum of the gradient (compressional wave) and the rotational (shear wave) of scalar potentials satisfying Helmholtz equations, which are simpler to handle.

A key challenge is that a naïve application of this decomposition leads to ill-posed formulations: the resulting operator is not of Fredholm type, with both the kernel and the co-image of its principal part being infinite-dimensional.

To overcome this, we design a suitable preconditioner that restores well-posedness. The resulting formulation is then discretized using Nyström methods, yielding a numerical scheme with superalgebraic convergence. We provide a theoretical analysis that proves well-posedness of the continuous problem, as well as the stability and superalgebraic convergence of its discretization.

References

- [1] V. Domínguez, C. Turc (2024). Robust boundary integral equations for the solution of elastic scattering problems via Helmholtz decompositions, *Comput. Math. Appl.*, vol. 175, 152–173. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2024.09.013>
- [2] V. Domínguez, C. Turc (2024). Nyström discretizations of boundary integral equations for the solution of 2D elastic scattering problems, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 440, Paper No. 115622, 28 pp. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115622>

Acknowledgments. The author acknowledges the support of the projects “Adquisición de conocimiento y minería de datos, funciones especiales y métodos numéricos avanzados” from Universidad Pública de Navarra, Spain, and “Técnicas innovadoras para la resolución de problemas evolutivos”, ref. PID2022-136441NB-I00, from the Ministerio de Ciencia e Innovación, Gobierno de España.

Análisis de un método de Trefftz para la simulación de la propagación de ondas en el espacio libre

Virginia Selgas, Peter Monk, Manuel Pena

Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo

selgasvirginia@uniovi.es

El objetivo de este trabajo es proponer y analizar un método de Trefftz, como caso particular de método de Galerkin discontinuo, para la simulación numérica de la propagación de ondas acústicas en el dominio de frecuencias. Suponemos que la dispersión acústica se debe a la presencia de un obstáculo acotado, penetrable y posiblemente absorbente. Así, el problema modelo es un problema de transmisión para la ecuación de Helmholtz, con un índice de refracción no constante y posiblemente complejo en el obstáculo.

Hacemos uso de un dominio computacional que contiene al objeto e incluimos la condición de radiación sobre la frontera artificial usando el operador Neumann a Dirichlet (N-a-D). Proponemos una formulación con elementos de Trefftz en el dominio computacional, y analizamos su convergencia. En particular demostramos que, cuando se discretiza localmente con ondas planas, el esquema numérico presenta convergencia cuasi óptima tanto al refinar la malla como al incrementar el número de ondas planas utilizadas en cada elemento. También estudiamos el efecto de la aproximación numérica del operador N-a-D.

Concluimos mostrando resultados numéricos que verifican nuestros resultados de convergencia teóricos y que ilustran el comportamiento del método.

Referencias

- [1] R. Hiptmair, A. Moiola, I. Perugia (2011), Plane wave discontinuous Galerkin methods for the 2D Helmholtz equation: analysis of the p -version. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(1), 264–284.
- [2] R. Hiptmair, A. Moiola, I. Perugia (2016). A Survey of Trefftz Methods for the Helmholtz Equation. In G.R. Barrenechea, A. Cangiani, E.H. Geogoulis, eds., *Building Bridges: Connections and Challenges in Modern Approaches to Numerical Partial Differential Equations*, Lect. Notes Comput. Sci. Eng., vol. 114, Springer, 237–278.
- [3] P. Monk, M. Pena, V. Selgas (2025). Trefftz Discontinuous Galerkin Approximation of an Acoustic Waveguide. *SIAM J. Numer. Anal.*, 63(4), 1561–1585.
- [4] P. Monk, D.Q. Wang (1999). A least-squares method for the Helmholtz equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 175, 121–136.

Agradecimientos. Trabajo parcialmente financiado por el proyecto MICINN PID2020-116287GB-I00.

Implementación de un método de Trefftz para la resolución de la ecuación de Helmholtz en una guía de ondas

Manuel Pena, Peter Monk, Virginia Selgas

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidade de Vigo

manuel.pena@uvigo.gal

Los métodos de Trefftz [1, 2] se pueden enmarcar dentro del conjunto de métodos tipo Galerkin discontinuo, en los que las funciones de base utilizadas pertenecen al núcleo del operador diferencial. De este modo, la ecuación diferencial se satisface localmente en el interior de cada elemento y el problema consiste en imponer adecuadamente condiciones de transmisión entre elementos.

En [3] se resuelve la ecuación de Helmholtz en una guía de ondas utilizando como bases locales un conjunto de ondas planas que son soluciones de la ecuación de Helmholtz en el elemento. Esto tiene varias ventajas:

- Todas las integrales se plantean únicamente en las facetas de los elementos.
- Las integrales admiten fórmulas exactas.
- La información sobre el número de onda está incluida en la base de funciones, con lo cual para números de onda muy altos no es necesario refinar extremadamente la malla, o aumentar el número de funciones de base, lo cual, además, atenúa el efecto de polución del error.

Por otra parte, el condicionamiento de la matriz del sistema lineal asociado empeora rápidamente cuando se enriquecen las bases locales de ondas planas, por lo que este tipo de métodos suelen presentar problemas de estabilidad.

En esta charla se detallarán los resultados anteriormente mencionados, así como se mostrará la dependencia de la solución con respecto al número de modos utilizados para aproximar el operador Neumann-a-Dirichlet usado para acotar el dominio computacional.

Referencias

- [1] R. Hiptmair, A. Moiola, I. Perugia (2011), Plane wave discontinuous Galerkin methods for the 2D Helmholtz equation: analysis of the p -version. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(1), 264–284.
- [2] R. Hiptmair, A. Moiola, I. Perugia (2016). A Survey of Trefftz Methods for the Helmholtz Equation. In G.R. Barrenechea, A. Cangiani, E.H. Geogoulis, eds., *Building Bridges: Connections and Challenges in Modern Approaches to Numerical Partial Differential Equations*, Lect. Notes Comput. Sci. Eng., vol. 114, Springer, 237–278.
- [3] P. Monk, M. Pena, V. Selgas (2025). Trefftz Discontinuous Galerkin Approximation of an Acoustic Waveguide. *SIAM J. Numer. Anal.*, 63(4), 1561–1585.

Agradecimientos. Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio Español de Ciencia, Innovación y Universidades/Agencia Estatal de Investigación (MCIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER,UE) mediante el proyecto PID2023-147790OB-I00.

Análisis matemático y numérico de un problema termo-electromagnético axisimétrico

Pilar Salgado, Dolores Gómez, Bibiana López-Rodríguez, Pablo Venegas

Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela & CITMAga,
Centro de Investigación y Tecnología Matemática de Galicia

mpilar.salgado@usc.es

El objetivo de este trabajo es analizar desde un punto de vista matemático y numérico un problema de corrientes inducidas axisimétrico acoplado con la ecuación del calor [2]. Se trata de un modelo ampliamente utilizado en la simulación de procesos de calentamiento por inducción con geometría cilíndrica y cuyas dificultades teóricas son similares a las que presenta el problema clásico del termistor [3]. El modelo electromagnético se formula en régimen armónico y en términos de la componente acimutal del vector potencial magnético, mientras que el modelo térmico se estudia en régimen estacionario. Para probar la existencia de solución del problema acoplado se utiliza un teorema de punto fijo siguiendo las ideas de [1] y [5]. Además, se prueba la unicidad de solución bajo hipótesis adicionales sobre los datos.

Se propone un algoritmo de punto fijo para resolver el problema acoplado y una discretización de las iteraciones de punto fijo basada en elementos finitos nodales. Inspirándose en las ideas de [4] se prueba la convergencia lineal de la iteración de punto fijo y se derivan órdenes de convergencia óptimos para su aproximación mediante elementos finitos. Finalmente se muestran resultados numéricos sobre un test académico para validar las estimaciones de error teóricas así como resultados sobre una aplicación física.

Referencias

- [1] A. Bermúdez, R. Muñoz-Sola (1999). Existence of solution of a coupled problem arising in the hermoelectrical simulation of electrodes. *Quart. Appl. Math.*, 57 (4), 621–636.
- [2] D. Gómez, B. López-Rodríguez, P. Salgado, P. Venegas. A coupled steady thermo-electromagnetic problem in axisymmetric geometries. *IMA J. Numer. Anal.*, drae056, <https://doi.org/10.1093/imanum/drae056>
- [3] S.D. Howison, J.F. Rodrigues, M. Shillor (1993). Stationary solutions to the thermistor problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 174(2), 573–588.
- [4] A. F. D. Loula, J. Zhu (2001). Finite element analysis of a coupled nonlinear system. *Comput. Appl. Math.*, 20(3), 321–339.
- [5] I. Yousept. Optimal control of a nonlinear coupled electromagnetic induction heating system with pointwise state constraints (2010). *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.*, 2(1), 45-77.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por FEDER, Ministerio de Economía, Industria y Competitividad-AEI research project PID2021-122625OB-I00.

Processing poor experimental databases for object detection by topological derivative based methods

María-Luisa Rapún, Manuel Pena

Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Aeroespacial,
Universidad Politécnica de Madrid

marialuisa.rapun@upm.es

The main goal in inverse scattering problems is to reconstruct information about unknown objects or defects from measurements of scattered acoustic or electromagnetic waves. In many practical experimental setups, only limited aperture excitations and limited aperture receptor configurations are available.

In this talk we will study the performance of numerical methods based on the computation of topological derivatives and topological energies to process very reduced experimental measurements of the electromagnetic scattering produced by different objects extracted from the Fresnel database [1, 2].

References

- [1] A. Carpio, M. Pena, M.-L. Rapún (2021). Processing the 2D and 3D Fresnel experimental databases via topological derivative method. *Inverse Problems*, 37, art. 105012.
- [2] M. Pena, S. Muñoz, M.-L. Rapún (2024). Exploring the performance of the topological energy method for object and damage detection from noisy and poor databases. *Phil. Trans. R. Soc. A.*, 382, art. 20230303.

Acknowledgments. This work has been funded by the Spanish Ministry of Science, Innovation and Universities/State Research Agency (MCIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER,UE) under grant PID2023-147790OB-I00.

Topological derivative methods for identifying elastic scatterers in industrial problems

Claudiu Placinta, Sergio Muñoz, Guillermo Azuara, Eduardo Barrera, María-Luisa Rapún

Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Aeroespacial,
Universidad Politécnica de Madrid

claudiu.placinta@upm.es

Defects like holes or cracks inside materials can be modeled as scatterers of elastic waves. This scattering phenomena is used to detect and identify the presence of defects in many industrial applications. The majority of industrial methods for defect detection are based on the elapsed time of the scattered wave. Contrary, in this work, we present a method that takes into account the physics of the wave propagation phenomena and exploits it for defect detection. This method is based on a mathematical tool called topological derivative, which measures the sensitivity of a functional to infinitesimal domain perturbations. In this work, we will show numerical examples of different industrial applications of the method, such as real-time inspection of metallic plates and detection of flaws in welding steel joints.

Acknowledgments. This work has been funded by the Spanish Ministry of Science, Innovation and Universities/State Research Agency (MCIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER,UE) under grant PID2023-147790OB-I00. The authors gratefully acknowledge the Universidad Politécnica de Madrid (www.upm.es) for providing computing resources on Magerit Supercomputer.

Problemas inversos Bayesianos en geofísica

Ana Carpio, Elena Cebrián, Gerardo Oleaga, Carolina Abugattas

Departamento Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid

ana_carpio@mat.ucm.es

La resolución de problemas de scattering inverso conduce a menudo a problemas de optimización y muestreo que requieren tratar cantidades moderadas/grandes de ecuaciones en derivadas parciales que actúan como restricciones. Nos centraremos en el problema de determinar inclusiones en un medio estratificado a partir de la medición de campos de ondas en la superficie, al tiempo que cuantificamos la incertidumbre en las predicciones y evaluamos el efecto de distintas discretizaciones de las ecuaciones de ondas. Caracterizamos las inclusiones mediante parámetros que describen las propiedades y formas de sus materiales. Diseñaremos algoritmos adaptativos para estimar las configuraciones más probables mediante optimización de funcionales de coste con regularizaciones Bayesianas y restricciones de tipo ecuación de ondas [1]. En pruebas sintéticas con una sola frecuencia, estos esquemas convergen en pocas iteraciones con niveles de ruido crecientes. Para obtener una visión global de otras posibles configuraciones de alta probabilidad y de efectos de asimetría, recurrimos a la resolución del problema Bayesiano inverso mediante métodos de cadenas de Markov Monte Carlo de invarianza afín. Su implementación requiere resolver millones de problemas de ondas y obliga a usar mallas fijas. Si bien las configuraciones óptimas siguen siendo similares, encontramos inclusiones adicionales de alta probabilidad que dependen de la información previa, el nivel de ruido y la estructura de las capas, efecto que puede reducirse considerando más frecuencias [1].

Referencias

- [1] C. Abugattas, A. Carpio, E. Cebrián, G. Oleaga (2025). Quantifying uncertainty in inverse scattering problems set in layered environments. *Applied Mathematics and Computation*, 500, 129453.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por el proyecto MICINN - AEI PID2020-112796RB-C21.

Sesión especial 32

Teoría de nudos

Equipo organizador:

- *Federico Cantero Morán* (Universidad Autónoma de Madrid)
- *Marithania Silvero Casanova* (Universidad de Sevilla)

Descripción

El objetivo de esta sesión es reunir a algunos de los investigadores que actualmente desarrollan su trabajo en teoría de nudos en España, en un momento de creciente actividad en el área. Los participantes provienen de comunidades diversas como la teoría de grupos, las singularidades, las superficies de Riemann, la geometría simpléctica o la topología algebraica, lo que refleja el carácter transversal y enriquecedor de esta disciplina.

Con esta sesión, además de dar visibilidad al trabajo en Teoría de nudos de la comunidad matemática española, aspiramos a fomentar nuevas sinergias en el área y a consolidar una red de colaboración que impulse el desarrollo de la teoría de nudos en el contexto nacional.

Esta actividad cuenta con el apoyo de la Red Española de Topología (RET).

Palabras clave: nudos; trenzas; topología en dimensión baja; invariantes.

Programa

LUNES, 19 de enero

- 15:30 – 16:00 Ana García Lecuona (University of Glasgow)
Distinguiendo clases de concordancia en nudos mutantes
- 16:00 – 16:30 Raquel Díaz Sánchez (Universidad Complutense de Madrid)
Patrones de torsión en la homología de Khovanov (I)
- 16:30 – 17:00 Pedro González Manchón (Universidad Politécnica de Madrid)
Patrones de torsión en la homología de Khovanov (II)
- 17:00 – 17:30 Antonio Costa González (Universidad Nacional de Educación a Distancia)
On symmetries of alternating knots

MARTES, 20 de enero

- 11:00 – 11:30 Marc Kegel (Universidad de Sevilla)
Cirugía de Dehn y trazas de nudos
- 11:30 – 12:00 Francisco Javier Martínez Aguinaga (Universidad Complutense de Madrid)
Nudos legendrianos: flexibilidad y rigidez
- 12:00 – 12:30 Álvaro del Valle Vilchez (Universidad de Sevilla)
Sobre el género de Turaev y el índice de arco de un enlace
- 15:30 – 16:00 Juan González-Meneses López (Universidad de Sevilla)
3-trenzas positivas, homología de Khovanov y teoría de Garside
- 16:00 – 16:30 Benjamin Bode (Universidad Politécnica de Madrid)
Braided open books
- 16:30 – 17:00 Miguel Orbegozo Rodríguez (ETH - Zurich)
Trasladando técnicas de open books a enlaces no fibrados
- 18:00 – 18:30 Jorge Becerra Garrido (Université Bourgogne Europe)
Álgebras XC e invariantes cuánticos de nudos
- 18:30 – 19:00 Ángel González Prieto (Universidad Complutense de Madrid)
Quantization of Alexander invariants through representation theory

Distinguiendo clases de concordancia en nudos mutantes

Ana García Lecuona

University of Glasgow

Ana.Lecuona@glasgow.ac.uk

La clase de nudos slice consiste en todos los nudos concordantes al nudo trivial, esto es, aquellos nudos en la esfera tridimensional que son el borde de un disco encajado en la bola de cuatro dimensiones. Dos nudos son mutantes si podemos obtener el uno a partir del otro a través de una rotación sobre una esfera de Conway. Es un problema difícil distinguir en concordancia nudos mutantes, principalmente porque comparten muchos invariantes, entre ellos la cubierta doble ramificada sobre la esfera. En esta charla presentaremos un método para solventar estas dificultades basado en la teoría desarrollada por Casson y Gordon sobre nudos homotópicamente ribbon. Este trabajo es una colaboración con Andy Wand.

Patrones de torsión en la homología de Khovanov (I)

Raquel Díaz Sánchez

Universidad Complutense de Madrid

radiaz@mat.ucm.es

La homología de Khovanov, introducida por Mikhail Khovanov en 1998, es una herramienta que refina el polinomio de Jones en la teoría de nudos, proporcionando un invariante homológico más potente. En esencia, a cada nudo se le asigna una colección de complejos de cadenas, y las homologías de estos complejos es el invariante de Khovanov. Este invariante puede distinguir nudos con el mismo polinomio de Jones, y es especialmente útil para analizar la estructura de nudos y enlaces complejos. Una conjetura debida a Shumakovitch afirma que todo nudo (salvo unas pocas y concretas excepciones), tiene torsión en su homología de Khovanov. Esta es la primera de dos charlas en las que analizaremos algunos patrones de torsión que permiten determinar elementos concretos de torsión en la homología de importantes familias de nudos y enlaces. Se describirán resultados del artículo [1]. Trabajo conjunto con Pedro M. G. Manchón.

Referencias

- [1] Díaz, R. and Manchón, P. M. G.: A pattern for torsion in Khovanov homology. *Fund. Math.* 270 (2025), no. 1, 75–97.

Patrones de torsión en la homología de Khovanov (II)

Pedro González Manchón

Universidad Politécnica de Madrid

pedro.gmanchon@upm.es

Esta es la segunda de dos charlas en las que analizaremos algunos patrones de torsión que permiten determinar elementos concretos de torsión en la homología de importantes familias de nudos y enlaces. Veremos también cómo podemos utilizar cierto tipo de submódulos del complejo de cadenas para distinguir elementos de torsión que se encuentran en el mismo módulo de homología de Khovanov. Finalmente mostraremos varias aplicaciones para familias de trenzas de tres cuerdas, enlaces pretzel y enlaces racionales. Estos resultados están recogidos en el preprint [1]. Trabajo conjunto con Raquel Díaz.

Referencias

- [1] Díaz, R. and Manchón, P. M. G.: New torsion patterns in Khovanov homology, arXiv:2508.00606, 25 pages.

On symmetries of alternating knots

Antonio Costa González

Universidad Politécnica de Madrid

acosta@mat.uned.es

For any geometrical object, it is natural to study its symmetries and this has also been one of the classical problems in knot theory. The simplest symmetries for knots are certainly those given by a rotation around an axis of the space. We will say that a knot K is q -periodic if there is a rotation of order q that leaves K invariant (in the case $q = 2$, the axis of the rotation must not intersect the knot).

The easiest way to find symmetries of a knot is on its projections. A projection is q -periodic if there is a rotation of order q of the plane leaving the projection of the knot invariant with its overpasses and underpasses. Determining whether a projection of a knot K is q -periodic is something that can be done, but the problem is to determine in which of the infinite projections of K the symmetries are to be found. The main theorem implies that for alternating knots, the possible q -periodicities with $q > 2$ can be “visualized” on alternating projections.

Finally other types of symmetries in the same context will be considered.

Cirugía de Dehn y trazas de nudos

Marc Kegel

Universidad de Sevilla

kegelmarc87@gmail.com

Dado un nudo K en una 3-esfera, podemos construir nuevas 3- y 4-variedades de K haciendo cirugía en K o adjuntando un asa cuatridimensional de índice 2 a la 4-bola a lo largo de K . En esta ponencia, vamos a discutir los resultados nuevos que responden a si K está determinada por estas 3- y 4-variedades.

Nudos legendrianos: flexibilidad y rigidez

Francisco Javier Martínez-Aguinaga

Universidad Complutense de Madrid

frmart02@ucm.es

La teoría de Nudos Legendrianos estudia nudos tangentes a una distribución de contacto en el espacio 3-dimensional. Es conocido que todo nudo admite un representante Legendriano. Sin embargo, el espacio de nudos legendrianos y el espacio de todos los nudos presentan diferencias a nivel homotópico. Esto se puede apreciar ya a nivel de componentes conexas: existen pares de nudos legendrianos que no son isótopos a través de nudos Legendrianos a pesar de serlo a nivel topológico. En esta charla discutiremos cuestiones sobre flexibilidad/rigidez entre estos espacios a nivel de grupos fundamentales.

Sobre el género de Turaev y el índice de arco de un enlace

Álvaro del Valle Vélchez

Universidad de Sevilla

adelvalle3@us.es

Determinar si un nudo o enlace es alternante (es decir, si admite un diagrama alternante) es, en general, un problema complicado. En este marco, el género de Turaev g_T surge como un invariante numérico que mide qué tan lejos se encuentra un enlace de ser alternante. En esta charla exploraremos la relación entre g_T y otro invariante numérico, el índice de arco α . En particular, proponemos la siguiente conjetura:

$$c(L) + 2 - \alpha(L) \geq 2g_T(L)$$

para cualquier enlace primo y no separado L , donde $c(L)$ es el número de cruces de L .

Presentaremos distintas estrategias y técnicas para demostrar esta conjetura en familias significativas de enlaces, incluyendo enlaces adecuados, clausuras de 3-trenzas positivas, enlaces tóricos y nudos de Kanenobu. Trabajo en colaboración con Adam M. Lowrance.

3-trenzas positivas, homología de Khovanov y teoría de Garside

Juan González-Meneses López

Universidad de Sevilla

meneses@us.es

Trabajo conjunto con Álvaro del Valle y Marithania Silvero. En esta charla, a partir de una clasificación de las clases de conjugación de trenzas de 3 cuerdas (3-trenzas) proveniente de la teoría de Garside, determinaremos las primeras cuatro columnas (grado homológico) y las tres columnas inferiores (grado cuántico) de la homología de Khovanov de una 3-trenza positiva. Además, el número de filas y columnas que podemos describir aumenta con el ínfimo de la trenza, una noción de la teoría de Garside que veremos cómo calcular y cómo maximizar en la clase de conjugación de la trenza.

Braided open books

Benjamin Bode

Universidad Politécnica de Madrid

benjamin.bode@upm.es

An open book consists of a link (the “binding”) and the fiber surfaces of a fibration of the link complement over the circle (the “pages”) with a specified behaviour in a tubular neighbourhood of the binding. In particular, in the 3-sphere the bindings of open books are exactly the fibered links. It is a classical result by Alexander that every link is the closure of some braid. In this talk I will discuss what it means for an open book to be braided. Roughly speaking, there should be a “braid axis” O such that the binding is braided relative to O , but also all the fiber surfaces should have a natural position relative to O . I will present new results and constructions of such braided open books.

Trasladando técnicas de open books a enlaces no fibrados

Miguel Orbegozo Rodríguez

ETH - Zurich

miguel.orbegozo@unine.ch

Un enlace fibrado es aquel cuyo complemento en S^3 admite un fibrado sobre S^1 . En este caso, su complemento está determinado por una superficie S (la fibra), y un difeomorfismo h de S . Esto permite estudiar propiedades de enlaces fibrados mediante difeomorfismos de superficies. El objetivo de esta charla es mostrar como técnicas de open books pueden utilizarse más generalmente para cualquier enlace. En particular, resultados conocidos para enlaces fibrados, tales como comportamiento bajo sumas de Murasugi y criterios de primalidad, así como resultados de geometría de contacto, tienen una versión análoga para enlaces no fibrados.

En colaboración con Peter Feller y Lukas Lewark.

Álgebras XC e invariantes cuánticos de nudos

Jorge Becerra Garrido

Université Bourgogne Europe

Jorge.Becerra-Garrido@u-bourgogne.fr

Las álgebras de Hopf de cinta y sus representaciones permiten construir invariantes cuánticos de nudos, enlaces y enredos que recuperan invariantes clásicos como el polinomio de Alexander o el de Jones. El objetivo de esta charla es doble: por una parte, presentaré la estructura algebraica mínima necesaria para producir un invariante cuántico al estilo de Lawrence (las llamadas álgebras XC); y por otra parte, explicaré cómo este invariante puede codificarse de modo natural en un funtor monoidal que extiende el famoso funtor de Reshetikhin-Turaev. Finalmente, indicaré cómo este enfoque generaliza canónicamente a un invariante cuántico de nudos y enredos virtuales.

Quantization of Alexander invariants through representation theory

Ángel González Prieto

Universidad Complutense de Madrid

angelgonzalezprieto@ucm.ess

The Alexander polynomial is one of the most celebrated knot invariants due to both its computational simplicity and its many deep connections with other knot-theoretic features. This talk explores a novel geometric framework for understanding classical Alexander-type invariants of knots through the lens of representation varieties.

Specifically, we shall examine the moduli space of representations of knot groups into the affine group of a line, showing that its coordinate ring is naturally isomorphic to the symmetric algebra of the Alexander module of the knot. This identification leads to a conceptual description of the Alexander polynomial as the singular locus of a singular vector bundle, whose fibers correspond to representation varieties of the knot quandle. Time permitting, we will also discuss how a 3-dimensional Topological Quantum Field Theory (TQFT) can be constructed to quantise Alexander invariants, linking with classical tools such as Burau representations of braid groups.

Joint work with J. Martínez-Martínez and V. Muñoz.

Sesión especial 33

Teoría de números

Equipo organizador:

- *Óscar Rivero* (Universidade de Santiago de Compostela)
- *Carlos de Vera Piquero* (Universidad de Zaragoza)

Descripción

La teoría de números es un área que goza de gran tradición en España. Son varios los polos geográficos donde se concentran investigadores de esta rama (Barcelona, Lleida, Madrid, Málaga, Sevilla, Zaragoza o Santiago) y la diversidad de temas tratados cubre un amplio espectro dentro de la disciplina: geometría aritmética, métodos p -ádicos, teoría analítica, teoría de Hopf–Galois o métodos computacionales. Pretendemos que esta sesión sirva para poner en contacto a distintos investigadores, crear sinergias y potenciar colaboraciones dentro de la comunidad de teoría de números en España.

Palabras clave: Teoría de números; Geometría aritmética; Representaciones de Galois; Funciones L ; Teoría de Hopf–Galois.

Programa

LUNES, 19 de enero

- 15:30 – 16:00 José María Tornero (Universidad de Sevilla)
Cuerpos de Heegner
- 16:00 – 16:30 Beatriz Barbero (University College Dublin)
On the existence of morphisms between certain Artin–Schreier curves
- 16:30 – 17:00 Daniel Martínez Marqués (Universidad Autónoma de Madrid)
The refined class number formula for Drinfeld modules
- 17:00 – 17:30 Ariel Pacetti (Universidade de Aveiro)
Motivos hipergeométricos y la ecuación de Fermat generalizada

MARTES, 20 de enero

- 11:00 – 11:30 Anna Río (Universitat Politècnica de Catalunya)
Extensions of braces
- 11:30 – 12:00 Montse Vela (Universitat Politècnica de Catalunya)
Estructuras Hopf-Galois de los puntos de tres y seis torsión de la lemniscata
- 12:00 – 12:30 Daniel Gil-Muñoz (Charles University of Prague)
Estructura aditiva de cuerpos cúbicos más simples de índice primo
- 15:30 – 16:00 Armando Gutiérrez Terradillos (Aarhus University)
On periods and L-functions for $\mathrm{GU}(2, 2) \times \mathrm{GL}(2)$
- 16:00 – 16:30 Óscar Rivero (Universidade de Santiago de Compostela)
An anticyclotomic Euler system for Hilbert cuspforms over a real quadratic field
- 16:30 – 17:00 Carlos de Vera Piquero (Universidad de Zaragoza)
On p -adic L-functions for $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ and Artin formalism
- 17:00 – 17:30 Martí Roset (Sorbonne Université)
Rigid cocycles for SL_n and their values at special points
- 18:00 – 18:30 Mar Curcó-Iranzo (Utrecht University)
Generalised Jacobians and modular curves
- 18:30 – 19:00 Ignacio Muñoz Jiménez (Università degli Studi di Genova)
Quaternionic big Heegner points over totally real fields

Cuerpos de Heegner

José María Tornero, Joan Carles Lario, Miguel Pineda

Universidad de Sevilla

tornero@us.es

Este trabajo está aún en desarrollo y su autoría es compartida con Joan Carles Lario y Miguel Pineda. La idea consiste en estudiar cuerpos cúbicos que generalizan los usados por Heegner para resolver el problema de los cuerpos cuadráticos imaginarios de clase 1. Por el camino aparecerán curvas de género 1 (evidentemente), problemas de ramificación (cómo no) y una cantidad considerable de cálculos (spoiler alert).

On the existence of morphisms between certain Artin–Schreier curves

Beatriz Barbero, Gary McGuire, Stefano Lia

Department of Mathematics, University College Dublin

beatriz.barberolucas@ucdconnect.ie

It is well known that given the two Artin–Schreier curves of the form $B_m: y^p - y = x^m$ and $B_d: y^p - y = x^d$, defined over $\mathbb{F}_p$, if $d \mid m$ then there exists a surjective morphism $B_m \rightarrow B_d$. In this work we are interested in studying when the converse of this statement is true. In particular, we consider the case when $m = p^k + 1$ and $d = p^r + 1$. This is a joint work with Gary McGuire and Stefano Lia.

The refined class number formula for Drinfeld modules

Daniel Martínez Marqués, María Inés de Frutos Fernández, Daniel Macías Castillo

Universidad Autónoma de Madrid

`daniel.martinezm@uam.es`

In 2012, Taelman proved an analogue of the analytic class number formula for Drinfeld modules. In joint work with María Inés de Frutos Fernández and Daniel Macías Castillo, we state and prove an equivariant refinement of this formula, relating the special L -value defined in a Whitehead group with the refined Euler characteristic of a complex constructed from the Drinfeld exponential. In this talk, we will review Taelman's work and discuss the formulation of the refined formula, commenting on how we circumvent the difficulties arising in noncommutative settings.

Motivos hipergeométricos y la ecuación de Fermat generalizada

Ariel Pacetti

Departamento de Matemáticas, Universidade de Aveiro

apacetti@ua.pt

El objetivo de esta charla es dar una introducción a los motivos hipergeométricos así cómo enunciar sus propiedades más importantes. Aprovecharemos para mostrar cómo el uso de motivos hipergeométricos se encuadra bien en el programa de Darmon para el estudio de la ecuación de Fermat generalizada $x^p + y^q = z^r$.

Extensions of braces

Anna Río

Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya

anna.rio@upc.edu

In group theory, semidirect products provide an *external* construction for split extensions. In the theory of skew braces, however, a general notion of semidirect product is still lacking, despite the existence of several partial approaches. When considering split extensions separately for the additive and multiplicative structures, certain compatibility conditions arise. Our aim is to formulate the problem in (skew brace-)cohomological terms, with the ultimate goal of establishing a coherent definition for split extensions in the context of skew braces.

Estructuras Hopf-Galois de los puntos de tres y seis torsión de la lemniscata

Montse Vela

Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya

montse.vela@upc.edu

Estudiamos el cuerpo de números generado por las coordenadas de los puntos de tres (o seis) torsión de la lemniscata. Esta extensión no es de Galois pero admite seis estructuras Hopf-Galois diferentes. Daremos la descripción de estas estructuras calculando el álgebra de Hopf asociada a una de ellas y analizando y calculando el retículo de subcuerpos de esta extensión

Estructura aditiva de cuerpos cúbicos más simples de índice primo

Daniel Gil Muñoz, Magdaléna Tinková

Department of Mathematics, Charles University of Prague

daniel.gil-munoz@matfyz.cuni.cz

La familia de los cuerpos cúbicos más simples (simplest cubic fields) es una familia paramétrica de cuerpos numéricos cúbicos introducidos por Shanks en 1974, que poseen propiedades aritméticas que los hacen un objeto de estudio bastante accesible. En esta charla nos restringiremos a aquellos cuerpos cúbicos más simples cuyo elemento generador tiene índice primo, y trataremos el problema de la estructura aditiva del anillo de enteros de un cuerpo cúbico más simple y, en particular, de sus elementos algebraicos totalmente positivos que son aditivamente indescomponibles, en el sentido de que no se pueden descomponer como suma de otros elementos algebraicos totalmente positivos.

On periods and L -functions for $\mathrm{GU}(2, 2) \times \mathrm{GL}(2)$

Armando Gutiérrez Terradillos, Antonio Cauchi

Department of Mathematics, Aarhus University

armangute@math.au.dk

The study of periods of automorphic forms is a key theme in the Langlands program and has become central to understanding the structure and properties of automorphic representations. In recent years, the conjectures of Sakellaridis and Venkatesh (and then Ben-Zvi, Sakellaridis, and Venkatesh) in the context of spherical varieties has led to a deeper understanding of automorphic periods and their relation to special values of L -functions. In this talk, I present work in progress aimed at looking at certain non-spherical cases. Precisely, I will describe a new integral representation of the degree 12 “exterior square $\times$ standard” L -functions on generic cusp forms on $\mathrm{GU}(2, 2) \times \mathrm{GL}(2)$ (or $\mathrm{GL}(4) \times \mathrm{GL}(2)$) and how it can be used to relate the non-vanishing of its central value to a certain cohomological and non-spherical period.

An anticyclotomic Euler system for Hilbert cuspforms over a real quadratic field

Óscar Rivero, Raúl Alonso, Francesc Castella

Departamento de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela

`oscar.rivero@usc.es`

Let g be a Hilbert cuspform of parallel weight over a real quadratic field F and let $\text{As}(V_g)$ denote the Asai representation associated with g . Let χ be a Hecke character of an imaginary quadratic field K for which the G_K -representation $\text{As}(V_g)(\chi)$ is conjugate self-dual. In this talk we will explain how to construct an Euler system for $\text{As}(V_g)(\chi)$. Expected applications include results towards the Bloch–Kato conjecture and towards an Iwasawa Main Conjecture for this representation.

On p -adic L -functions for $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ and Artin formalism

Carlos de Vera Piquero, Aprameyo Pal, Kazim Büyükboduk, Daniele Casazza

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

devera@unizar.es

I will report on an explicit construction of p -adic L -functions for $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ attached to Hida families of modular forms f and g , via p -adic interpolation of the so-called Shintani and Saito–Kurokawa lifts. I will also explain how these p -adic L -functions conjecturally arise as factors of certain triple product p -adic L -functions, yielding a p -adic Artin formalism for them, and show evidence towards this. The talk will be based on a series of works in collaboration with A. Pal, D. Casazza, and K. Büyükboduk.

Rigid cocycles for SL_n and their values at special points

Martí Roset, Peter Xu

Institut de mathématiques de Jussieu-PRG, Sorbonne Université

rosetmarti@gmail.com

The theory of complex multiplication implies that the values of modular functions at CM points belong to abelian extensions of imaginary quadratic fields. In this talk, we propose a conjectural approach to extending this phenomenon to the setting of totally real fields. Generalizing the work of Darmon, Pozzi, and Vonk, we construct rigid cocycles for SL_n , which play the role of modular functions, and define their values at points associated with totally real fields. The construction of these cocycles originates from a topological source: the Eisenstein class of a torus bundle.

Generalised Jacobians and modular curves

Mar Curcó-Iranzo

Utrecht University

mcurcoiranzo@gmail.com

The Jacobian $J_0(N)$ of the modular curve $X_0(N)$ has received much attention within arithmetic geometry for its relation with cusp forms and elliptic curves. The group of $\mathbb{Q}$ -rational torsion points on $J_0(N)$ controls the unramified cyclic covers of $X_0(N)$. A conjecture of Ogg predicted that, for N prime, the torsion of this group comes all from the cusps and is related to the so called Shimura covering - the maximal unramified abelian cover of $X_0(N)$. The statement was proved by Mazur and later generalised to arbitrary level N into what we call generalised Ogg's conjecture.

Consider now the generalised Jacobian $J_0(N)_{\mathbf{m}}$ with respect to a cuspidal modulus $\mathbf{m}$, i.e., a rational effective divisor with support at the cusps. This algebraic group is also related to the arithmetic of $X_0(N)$ through the theory of modular forms. Now the $\mathbb{Q}$ -rational torsion of $J_0(N)_{\mathbf{m}}$ is related to cyclic covers of $X_0(N)$ ramified at the cusps. In the talk we will introduce generalised Jacobians, we will present results that compute the $\mathbb{Q}$ -rational torsion of $J_0(N)$ for N an odd integer and we will discuss some ongoing research on maximal abelian coverings of $X_0(p)$ unramified outside cusps.

Quaternionic big Heegner points over totally real fields

Ignacio Muñoz Jiménez

Università degli Studi di Genova

ignacio.munoz.jimenez@edu.unige.it

The seminal work of Kolyvagin and Gross–Zagier in the late 1980s, centered on special points on elliptic curves known as Heegner points, remains one of the most significant advances toward the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture. Since then, their methods have been extended to many contexts, with modular forms playing a central role. In this talk, I will review Howard’s construction of “big Heegner points”, which generalize classical Heegner points to p -adic families of modular forms. Howard’s framework makes it possible to deform the classical setting and thereby study intricate or previously inaccessible cases. I will then outline ongoing work extending these ideas to Hilbert modular forms, yielding a totally real counterpart.

4

Charlas contribuidas



Programa

LUNES, 19 de enero, 15:30 – 17:30

- | | |
|---------------|---|
| 15:30 – 15:45 | José Luis Teruel (Universidad de Alicante)
<i>Complete surfaces with negative extrinsic curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$</i> |
| 15:45 – 16:00 | José Airán Santana Rivero (Universidad de La Laguna)
<i>Espacios de curvatura constante generalizados en geometría casi-contacto métrica</i> |
| 16:00 – 16:15 | Enrique Pendás Recondo (Universidad de Oviedo)
<i>Navegación de Zermelo con puntos de viraje</i> |
| 16:30 – 16:45 | José M. Rodríguez (Universidad Carlos III de Madrid)
<i>El teorema del collar para superficies completas</i> |
| 16:45 – 17:00 | Francisco García Cortés (Universidad de Sevilla)
<i>Not fundamental groups</i> |
| 17:00 – 17:15 | Ginevra Giordani (Università degli Studi dell'Aquila)
<i>Central Polynomials in PI-Algebras</i> |

MARTES, 20 de enero, 11:00 – 12:30

- | | |
|---------------|--|
| 11:00 – 11:15 | Ioar Casado Telletxea (Basque Center for Applied Mathematics)
<i>Contraction rates for generalized posteriors based on f-divergences: a diffusion process approach</i> |
| 11:15 – 11:30 | Manuel Mañas (Universidad Complutense de Madrid)
<i>Cadenas de Markov y ortogonalidad múltiple</i> |
| 11:30 – 11:45 | Beltrán de la Flor (Universidad de Cádiz)
<i>First integrals for Liénard equations and application to a Klein-Gordon-type equation</i> |
| 11:45 – 12:00 | Juan Silverio Martínez Baena (Universidad de Granada)
<i>Optimal regularity of radial solutions to the general Hardy-Hénon equation on the ball</i> |
| 12:00 – 12:15 | Josep Vives (Universitat de Barcelona)
<i>Dyson type formula for pure jump Lévy processes and applications to Finance</i> |

MARTES, 20 de enero, 15:30 – 17:30

- 15:30 – 15:45 Daniel Rodríguez (Universidad Rey Juan Carlos)
Iterative PageRank and fixed points
- 15:45 – 16:00 María Ángeles Castro (Universidad de Alicante)
Métodos numéricos exactos y no estándar para ecuaciones diferenciales con retardo
- 16:00 – 16:15 Ruymán Cruz Barroso (Universidad de La Laguna)
Una técnica mixta de integración numérica en la circunferencia unidad empleando ceros de polinomios para-ortogonales
- 17:00 – 17:15 Umberto Biccari (Universidad de Deusto)
Deep Operators Networks in Control Theory: concepts and applications

MARTES, 20 de enero, 18:00 – 19:00

- 18:00 – 18:15 Sergio Segura de León (Universitat de València)
Radial spectra of the 1-Laplacian in the annulus
- 18:15 – 18:30 Yino Beto Cueva Carranza (Universidade Estadual Paulista)
Ocurrencia de ruptura de simetría en problemas de tipo Hénon que involucran al operador 1-laplaciano

JUEVES, 22 de enero, 11:00 – 13:30

- 11:00 – 11:15 Eduardo Muñoz Hernández (Universidad Complutense de Madrid)
High multiplicity and global structure of coexistence states in a predator-prey model with saturation
- 11:15 – 11:30 José Luis Gracia (Universidad de Zaragoza)
Numerical approximation of singularly perturbed convection-diffusion elliptic problems with a non-smooth forcing term
- 11:30 – 11:45 Nicolás Errandonea (Basque Center of Applied Mathematics)
Adaptive nearest neighbors for partial labels learning
- 11:45 – 12:00 Pablo M. Berná (CUNEF Universidad)
Espacios de aproximación, espacios discretos de Lorentz y el algoritmo greedy
- 12:15 – 12:30 Raúl Felipe Sosa (Universidad Antonio de Nebrija)
Generalized RKBS and the design of abstract neural networks: a functional analytic approach
- 12:30 – 12:45 Xabier de Juan (Basque Center of Applied Mathematics)
Robust mean estimation with Median-of-Means: upper and lower bounds in adversarial settings
- 12:45 – 13:00 Paula Soto Rodríguez (Universidad de Santiago de Compostela)
Dos nuevas reglas de reparto para el problema de asignación de peajes en una autopista
- 13:00 – 13:15 Achraf Ben Said (Universidad Complutense de Madrid)
Normas equivalentes en los espacios funcionales $L^p(\mathbb{R}^+)$ y $Ces_p(\mathbb{R}^+)$

JUEVES, 22 de enero, 15:30 – 17:30

- 15:30 – 15:45 Daniel de la Fuente Benito (Universidad de Oviedo)
Estructuras semi-riemannianas asociadas a un espaciotiempo galileano
- 15:45 – 16:00 Beatriz Marín Gimeno (Universidad de Murcia)
On local Liakopoulos-Meyer type inequalities
- 16:00 – 16:15 Joel Hurtado (Universitat Politècnica de Catalunya)
Effective bounds for compactness of semialgebraic sets defined over the rationals
- 16:30 – 16:45 Alberto Cobos Rábano (Katholieke Universiteit Leuven)
Cuando la geometría enumerativa no es enumerativa
- 16:45 – 17:00 María Pilar Vélez (Universidad Antonio de Nebrija)
Automated derivation of several geometry theorems from a given one
- 17:00 – 17:15 Vicente Ibáñez Orts
Stonehenge: cálculo del número π empleado en su diseño y análisis geométrico de la Piedra del Altar (Nº 80)

JUEVES, 22 de enero, 18:00 – 19:00

- 18:00 – 18:15 Itahisa Barrios Cubas (Universidad Autónoma de Madrid - ICMAT)
Pohoaev identity for the Spectral Fractional Laplacian
- 18:15 – 18:30 Jorge Ruiz Cases (Universidad Autónoma de Madrid)
Fractional fast diffusion with initial data a Radon measure
- 18:30 – 18:45 José C. Sabina de Lis (Universidad de La Laguna)
An optimum versión of the trace embedding for functions of bounded variation

VIERNES, 23 de enero, 11:00 – 12:30

- 11:00 – 11:15 Adrián Torres Martín (Universitat Autònoma de Barcelona)
Efficient computation of a parity-check matrix for $\mathbb{Z}_{p^s}$ -additive codes and $\mathbb{Z}_p\mathbb{Z}_{p^2}\mathbb{Z}_{p^3}$ -additive codes
- 11:15 – 11:30 Josep M. Miret (Universitat de Lleida)
Grafos de isogenias de curvas elípticas: entrelazando caminos de grados distintos
- 11:45 – 12:00 Héctor Orera (Universidad de Zaragoza)
Accurate computations with collocation matrices of Bernstein-type polynomial bases
- 12:00 – 12:15 Juan Antonio Vega Coso (Universidad de Salamanca)
Probabilidad de ruina con reset geométrico: un enfoque analítico en dominios finitos

Complete surfaces with negative extrinsic curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

José L. Teruel, João P. dos Santos

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

jose.teruel@ua.es

We establish Milnor-type results in the product space $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ concerning properly immersed surfaces with negative extrinsic curvature, under the additional assumption that one of their principal curvatures remains uniformly bounded away from zero.

Keywords: negative curved surfaces; non-euclidean product spaces; Milnor-type result;

References

- [1] J. M. Espinar, H. Rosenberg, J. A. Gálvez (2009) *Complete surfaces with positive extrinsic curvature in product spaces*. Comment. Math. Helv. 84, 351–386.
- [2] S. Montaldo, I. I. Onnis (2007). *A note on surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Bollettino U.M.I., vol. 8, 10-B, 939–950.

Espacios de curvatura constante generalizados en geometría casi-contacto métrica

José Airán Santana Rivero, Alfonso Carriazo Rubio

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna

alu0101362199@ull.edu.es

En este trabajo se estudia la geometría de contacto métrica en profundidad, introduciendo distintas variedades en esta área, desde las casi-contacto métricas hasta las Sasakianas. De estas últimas se indaga en propiedades sobre su curvatura a través del concepto de curvatura ϕ -seccional, se obtiene la expresión del tensor de curvatura y a partir de ahí se generalizan. Se trabaja en dichos nuevos espacios, buscando características de ellos tanto semejantes a las de los anteriores como novedosas y por último se le dotan de distintas estructuras para extraer mas información. Finalmente ilustramos con ejemplos de casos generales distintos de los anteriores con la ayuda de las variedades casi Hermíticas.

Palabras clave: Variedad casi-contacto métrica; Variedad de contacto métrica; Variedad K-contacto; Variedad Sasakiana; Variedad trans-Sasakiana; Curvatura ϕ -seccional; Espacio de curvatura ϕ -seccional constante generalizado.

Referencias

- [1] D. E. Blair. *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*. Second Edition. Progress in Mathematics 203. Birkhäuser. 2010.
- [2] P. Alegre, D. E. Blair, A. Carriazo. Generalized Sasakian-space-forms. *Israel Journal of Mathematics* 141 (2004), 157-183.
- [3] P. Alegre, A. Carriazo. Structures on generalized Sasakian-space-forms. *Differential Geometry and its Applications* 26 (2008), 656-666.

Navegación de Zermelo con puntos de viraje

Enrique Pendás Recondo

Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo

pendasenrique@uniovi.es

El problema de navegación de Zermelo consiste en encontrar la trayectoria más rápida entre dos puntos para un móvil en presencia de una corriente (como un barco o un aeroplano en presencia de viento). La versión clásica de este problema asume que el perfil de velocidades del móvil forma una figura geométrica fuertemente convexa, que puede interpretarse como la indicatriz de una cierta métrica de Finsler; en este caso, la solución del problema es una geodésica de dicha métrica. En esta charla exploraremos el caso en el que el perfil de velocidades no es convexo, lo que da lugar a trayectorias óptimas con puntos de viraje, como las trayectorias en zigzag que se observan en multitud de situaciones reales, por ejemplo en la navegación de barcos de vela o en el vuelo de ciertas aves migratorias.

Esta charla está basada en el artículo [1], en colaboración con Steen Markvorsen y Frederik Möbius Rygaard (Technical University of Denmark).

Palabras clave: Navegación de Zermelo; Geometría de Finsler; Indicatriz no convexa; Puntos de viraje; Ejemplos del mundo real.

Referencias

[1] S. Markvorsen, E. Pendás-Recondo, F. M. Rygaard (2025). Time-dependent Zermelo navigation with tacking. *ArXiv e-prints*, arXiv:2508.07274 [math.DG].

Agradecimientos. Esta investigación es parte del proyecto PID2021-124157NB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER “Una manera de hacer Europa”.

El teorema del collar para superficies completas

José M. Rodríguez, Peter Buser

Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid

jomaro@math.uc3m.es

Sea S una superficie riemanniana orientable completa con curvatura $K \geq -k^2$, donde k es una constante positiva. Para cualquier geodésica simple cerrada γ en S y $d > 0$, denotamos por

$$C(d) = \{x \in S \mid \text{dist}(x, \gamma) < d\}$$

el entorno tubular de radio d de γ . Si $d > 0$ es suficientemente pequeño, entonces $C(d)$ es doblemente conexo, es decir, topológicamente equivalente a $\mathbb{S}^1 \times (-1, 1)$. Si S tiene curvatura no positiva y $C(d)$ es doblemente conexo, entonces lo mismo se cumple para todos los $C(d')$ con $0 < d' < d$. En el caso general, esto no siempre es así. Para γ una geodésica cerrada simple de longitud $L(\gamma)$ en S , definimos d_γ como el supremo de todos los $d > 0$ para los que $C(d)$ y también todos los $C(d')$ con $0 < d' < d$ son topológicamente equivalentes a $\mathbb{S}^1 \times (-1, 1)$. El cilindro $C(d_\gamma)$ de anchura d_γ se denomina *collar alrededor de γ* .

Si S es compacta con curvatura constante $K = -k^2$, Randol demostró en [3] que

$$d_\gamma > \frac{1}{k} \operatorname{arccosh} \coth\left(\frac{k}{2} L(\gamma)\right) = \frac{1}{k} \operatorname{arcsinh} \operatorname{cosech}\left(\frac{k}{2} L(\gamma)\right). \quad (1)$$

Chavel y Feldman demostraron en [2] que (1) también se cumple si S es compacta y su curvatura satisface $-k^2 \leq K \leq -c^2$, con $c > 0$.

Después de eso, un enfoque alternativo en [1] permitió al segundo autor demostrar que (1) se cumple si S es compacta con $K \geq -k^2$.

Mientras que los argumentos anteriores de Randol, y Chavel y Feldman, funcionan para superficies completas, el argumento en [1] utiliza fuertemente la compacidad.

Nuestro objetivo en este trabajo es generalizar el resultado de [1] para superficies completas:

Teorema. *Sea S una superficie riemanniana orientable completa diferente de un toro con curvatura $K \geq -k^2$. Si γ es una geodésica simple cerrada homotópicamente no trivial en S , entonces se cumple (1).*

Palabras clave: Teorema del collar; comparación de Toponogov; conjuntos de nivel de funciones distancia.

Referencias

- [1] P. Buser (1978). The collar theorem and examples. *Manuscripta Math.*, 25, 349–357.
- [2] I. Chavel, E. A. Feldman (1978). Cylinders on surfaces. *Comment. Math. Helv.*, 53, 439–447.
- [3] B. Randol (1979). Cylinders in Riemann surfaces. *Comment. Math. Helv.*, 54, 1–5.

Not fundamental groups

Francisco García Cortés, Benjamin Church

Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla

fragacor2012@gmail.com

In [1] de Jong and Esnault provided us with an arithmetic obstruction for a finitely presented group to be the topological fundamental group of a quasi-projective smooth complex algebraic variety. Later Breuillard found the first example of a group for which the obstruction occurs.

After reviewing the definition of *weak integrality* and some classical results about SL_2 -character varieties, we report a family of groups for which the obstruction takes place and contains Breuillard's example as a particular case.

Preprint available as [arXiv:2410.23233](https://arxiv.org/abs/2410.23233).

Keywords: Fundamental group; Weak integrality; Character variety; Rational point.

References

- [1] J. de Jong, H. Esnault (2024). Integrality of the Betti moduli space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 377, 431–448.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Benjamin Church (Stanford University). Trabajo parcialmente financiado por los proyectos de investigación PID2020-117843GB-I00 y PID2020-114613GB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033.

Polinomios Centrales en Álgebras PI

Ginevra Giordani, Antonio Ioppolo, Antônio Augusto dos Santos, Ana Cristina Vieira

DISIM, Università degli Studi dell'Aquila

ginevra.giordani@graduate.univaq.it

En esta presentación hablaremos de la función de los polinomios centrales en la teoría de las identidades polinomiales. Esta teoría es el campo de investigación en álgebra que estudia las álgebras que satisfacen al menos una identidad polinomial no trivial (álgebras PI). Los polinomios centrales fueron introducidos por Regev en 2016 en álgebras de matrices [2] para estudiar sus identidades. También se puede estudiar comportamiento de estos polinomios analizando él de la secuencia $c_n^Z(A)$, $n = 1, 2, \dots$, que indica el crecimiento de la dimensión del espacio de los polinomios multilineales de grado n módulo los polinomios centrales de una álgebra A asociativa PI.

En 2018, Giambruno y Zaicev demostraron, por la clase de las álgebras asociativas, la existencia del límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n^Z(A)}.$$

En la presentación, después de una breve introducción sobre la teoría PI, explicaremos los resultados más recientes de la investigación sobre los polinomios centrales de álgebras PI, con particular énfasis sobre la clase de las superálgebras con superinvolución ([1]).

Palabras clave: identidades; polinomios centrales; álgebra; exponente; codimensión.

Referencias

- [1] G. Giordani, A. Ioppolo, A. A. P. dos Santos, A. C. Vieira. On the central exponent of superalgebras with superinvolution. *Próximamente en Canadian Mathematical Bulletin*.
- [2] A. Regev. Growth for the Central Polynomials. *Communications in Algebra*, 2016, 4411–4421, 44(10).

Agradecimientos. Esta charla se basa en [1], trabajo en colaboración con Antonio Ioppolo, Antônio Augusto dos Santos y Ana Cristina Vieira. Proyecto parcialmente financiado por el GNSAGA-Indam, FAPEMIG, CNPq y CAPES.

Contraction rates for generalized posteriors based on f -divergences: a diffusion process approach

Ioar Casado Telletxea, Enric Alberola Boloix

Basque Center for Applied Mathematics (BCAM)

icasado@bcamath.org

Recent advances in Bayesian statistics have led to methodological innovations that extend the scope of classical Bayesian inference. In particular, several alternatives and generalizations of the standard Bayesian posterior have been introduced to address its limitations. These approaches are commonly referred to under the broad term “generalized posteriors”.

In its most general form [1], a generalized posterior is the solution to the following variational problem:

$$q^* = \arg \min_{q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_q \left[\sum_{i=1}^n \ell(\theta, x_i) \right] + D(q \parallel \pi) \right\}, \quad (1)$$

where $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\{x_i\}_{i=1}^n$ are observations in an Euclidean space $\mathcal{X}$, $\ell : \mathbb{R}^d \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ is a loss function, $\pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ is a prior, and $D : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}_+$ is a divergence measure. Observe that choosing $\mathcal{Q} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\ell(\theta, x) = -\log p(x|\theta)$ for some likelihood $p(x|\theta)$, and $D = D_{\text{KL}}$ (the Kullback-Leibler divergence) recovers the standard Bayesian posterior.

Beyond the most basic cases, theoretical analysis of generalized posteriors arising from (1) is still lacking, especially when $D \neq D_{\text{KL}}$. In this work we study the finite-sample behavior of generalized posteriors defined via f -divergences [2], a broad class of divergence measures widely used in statistics. Our main technical contribution is to extend the stochastic differential equation (SDE) framework of [3] beyond the standard Bayesian posterior. Using those tools, we obtain non-asymptotic posterior contraction rates for f -divergence posteriors by bounding the moments of their associated SDEs. Our results yield nearly optimal rates and clarify how different divergence choices affect posterior concentration. Finally, we illustrate the general framework with concrete examples.

Keywords: generalized Bayesian inference; posterior contraction rates; f -divergences; diffusion processes.

References

- [1] J. Knoblauch, J. Jewson and T. Damoulas (2022). An optimization-centric view on Bayes’ rule: Reviewing and generalizing variational inference. *Journal of Machine Learning Research*, 23(132):1–109.
- [2] I. Csiszár (1967). On information-type measure of difference of probability distributions and indirect observations. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 2:299–318.
- [3] W. Mou, N. Ho, M. Wainwright, P. Bartlett and M. Jordan (2024). A diffusion process perspective on posterior contraction rates for parameters. *SIAM Journal on Mathematics of Data Science*, 6(2):553–577.

Cadenas de markov y ortogonalidad multiple

M. Mañas, A. Branquinho, A. Foulquié-Moreno

Departamento de Física Teórica, Universidad Complutense de Madrid

manuel.manas@ucm.es

El teorema espectral de Favard, probado recientemente para matrices banda acotadas con factorización bidiagonal positiva [1, 2], se aplica a una familia extensa de cadenas de Markov con matrices de transición banda acotadas, superando el marco clásico de nacimiento y muerte e incluyendo también aquellas con factorización bidiagonal estocástica positiva, es decir, composiciones de cadenas de nacimiento puro y de muerte pura. En el caso finito se obtiene, siguiendo a Karlin–McGregor [3], la representación espectral, se establece la recurrencia y se dan fórmulas explícitas para las distribuciones estacionarias en términos de polinomios ortogonales múltiples de tipo mixto. En el caso enumerable infinito la cadena no es necesariamente recurrente y su comportamiento se describe mediante la medida espectral asociada, mientras que la ergodicidad se caracteriza por la presencia de una masa en 1 en dicha medida, correspondiente al valor propio 1 con sus vectores propios derecho e izquierdo.

Palabras clave: cadenas de Markov; polinomios ortogonales múltiples; representación espectral; cadenas de nacimiento puro y de muerte pura; recurrencia y ergodicidad.

Referencias

- [1] A. Branquinho, A. Foulquié-Moreno, M Mañas (2023). Spectral theory for bounded banded matrices with positive bidiagonal factorization and mixed multiple orthogonal polynomials. *Adv. Math.* 434, 109313.
- [2] A. Branquinho, A. Foulquié-Moreno, M Mañas (2023). Oscillatory banded Hessenberg matrices, multiple orthogonal polynomials and random walks. *Phys. Scripta* 98, 105223.
- [3] S. Karlin, J. McGregor (1959). Random walks. *Illinois J. Math.* 3(1), 66-81.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por PID2021-122154NB-I00, Ortogonalidad y aproximación con aplicaciones en machine learning y teoría de la probabilidad y PID2024-155133NB-I00, Ortogonalidad, aproximación e integrabilidad: aplicaciones en procesos estocásticos clásicos y cuánticos.

First integrals for Liénard equations and application to a Klein-Gordon-type equation

Beltrán de la Flor, Adrián Ruiz, Concepción Muriel

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz

beltran.delaflores@uca.es

En este trabajo discutimos la integrabilidad de las ecuaciones de Liénard a través de la recientemente desarrollada teoría de $\mathcal{C}^\infty$ -estructuras. Proponemos un método de integración paso a paso que consiste en resolver de manera secuencial dos ecuaciones de Pfaff completamente integrables, siendo la primera resoluble por cuadraturas. Caracterizamos una clase de ecuaciones de Liénard para las cuales la solución de la primera ecuación de Pfaff puede ser determinada explícitamente, proporcionando así una integral primera de la ecuación de Liénard. El procedimiento de integración se completa entonces resolviendo una familia uniparamétrica de ecuaciones auxiliares de primer orden. Ilustramos la aplicabilidad de los resultados mediante la determinación de soluciones exactas de una ecuación en derivadas parciales de tipo Klein-Gordon con coeficientes variables.

Palabras clave: Ecuaciones de Liénard; Integrales primeras; $\mathcal{C}^\infty$ -simetrías; Simetrías de Lie.

Agradecimientos. Beltrán de la Flor agradece el apoyo financiero del Ministerio de Universidades de España (beca FPU FPU21/01046), así como el del Plan Propio de Estímulo y Apoyo a la Investigación y Transferencia 2025–2027 de la Universidad de Cádiz, España.

Optimal regularity of radial solutions to the general Hardy-Hénon equation on the ball

Juan Silverio Martínez Baena, Salvador Villegas Barranco

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

jsilverio@ugr.es

This contribution is devoted to the study of semi-stable radial solutions $u \in H^1(B_1)$ of $-\Delta u = |x|^\alpha f(u)$ in $B_1 \setminus \{0\}$, where $f \in C^1(\mathbb{R})$ is a general nonlinearity, $\alpha > -2$ and B_1 is the unit ball of $\mathbb{R}^N$, $N > 1$. We establish the boundedness of such solutions for dimensions $2 \leq N < 10 + 4\alpha$ and sharp pointwise estimates in the case $N \geq 10 + 4\alpha$. In addition, we provide, for this range of dimensions, a large family of semi-stable radially decreasing unbounded $H^1(B_1)$ solutions.

Keywords: Hardy-Henon equation, regularity estimates, semi-stable solutions.

Acknowledgments. Trabajo en colaboración con Salvador Villegas Barranco . Proyecto financiado por FEDER-MINECO Grant PID2021-122122NBI00 y J. Andalucía (FQM-116).

Dyson type formula for pure jump Lévy processes and applications to Finance

Josep Vives

Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial, Universitat de Barcelona

josep.vives@ub.edu

The talk is based on the paper [1] below. We obtain a Dyson type formula for integrable functionals of a pure jump Lévy process. We represent the conditional expectation of a random variable F at a time t as an exponential formula involving Malliavin derivatives evaluated along a frozen path. The series representation of this exponential formula turns out to be useful for different applications, and in particular in quantitative finance. For example, in pricing options under the Poisson-Black-Scholes model or in pricing discount bonds under a Lévy quadratic model.

Keywords: Lévy processes, Malliavin calculus, Clark-Ocone formula, Dyson type formula.

References

- [1] S. Jin, H. Schellhorn, J. Vives (2020). Dyson type formula for pure jump Lévy processes with some applications to finance. *Stochastic Processes and their Applications*, 130 (2), 824–844.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por MTM 2015-65092-PMINECO (2016-2018) and MEC MTM 2016-76420-P (2017-2020).

Iterative PageRank and fixed points

Daniel Rodríguez, David Aleja, Julio flores, Eva Primo and Miguel Romance

Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de los Materiales y Tecnología Electrónica, Universidad Rey Juan Carlos

danieljose.rodriguez@urjc.es

Let us consider a directed graph $\zeta = (V, E)$ with $V = \{1, 2, \dots, N\}$ the set of nodes and E the set of edges and let denote by $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, where the superscript T indicates the matrix transposition. If P_A denotes the row-normalization of the adjacency matrix A of the graph ζ , in the absence of dangling nodes, the Google matrix is defined by $G = \lambda P_A + (1 - \lambda)\mathbf{e}\mathbf{v}^T$, where $\lambda \in [0, 1]$ is the damping factor and $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ satisfying $\mathbf{v} > 0$ and $\mathbf{v}^T \mathbf{e} = 1$ is the personalization vector.

The PageRank vector $\pi \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ is the unique positive eigenvector of G^T associated to the eigenvalue 1, that is, $\pi > 0$, $\pi^T \mathbf{e} = 1$ and $G^T \pi = \pi$. In fact, it is well-known [1] that the PageRank vector can be expressed in the closed-form $\pi^T = (1 - \lambda)\mathbf{v}^T(I - \lambda P_A)^{-1} = \mathbf{v}^T X(\lambda)$, where $X(\lambda) = (1 - \lambda)(I - \lambda P_A)^{-1}$. At this point, what if we compute a new PageRank vector using $\pi \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ as a new personalization vector? Is there a limit for the iteration of the PageRank vector under the matrix $X(\lambda)$?

In this talk we study the convergence of the PageRank vector under the iteration of the matrix $X(\lambda)$ when the row-normalization matrix P_A is irreducible, that is, when there is no permutation matrix R of nodes V such that $R^T P_A R$ is upper-triangular. Additionally, we investigate the convergence of the Power Iteration Method applied to the matrix $X(\lambda)$ for the case when the row-normalization matrix P_A is no longer irreducible, that is, there exists a permutation matrix R such that the matrix $R^T P_A R$ has the form,

$$R^T P_A R = \begin{pmatrix} P_{A_1} & B \\ 0 & P_{A_2} \end{pmatrix}$$

where P_{A_1} and P_{A_2} are both square non-negative and irreducible matrices of order n_1 and n_2 , respectively, $n_1 + n_2 = N$, and B is a non-negative matrix of order $n_1 \times n_2$. We show that the recursive sequence $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 1}$ defined by $\mathbf{x}_{k+1}^T = \mathbf{x}_k^T X(\lambda) = \mathbf{v}^T X(\lambda)^k$, ($k \geq 1$) converges to a non-zero vector which, surprisingly, is related to the Perron vectors of matrices P_{A_1} and P_{A_2} [2].

Keywords: PageRank vector; irreducible matrix; Perron-Frobenius theory; Power Iteration Method.

References

- [1] P. Boldi, M. Santini, and S. Vigna, ACM Transactions on Information Systems (TOIS) 27, 1 (2009).
- [2] C.D., Meyer, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2000.

Agradecimientos. Este trabajo ha sido financiado por INCIBE/URJC proyecto M3386/2024/0031/001 dentro del marco de los fondos del Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia de la Unión Europea (Next Generation EU).

Métodos numéricos exactos y no estándar para ecuaciones diferenciales con retardo

M.A. Castro, C.J. Mayorga, A. Sirvent, F. Rodríguez

Departamento de Matemática Aplicada e Ingeniería Aeroespacial, Universidad de Alicante

ma.castro@ua.es

En esta charla analizamos la construcción de esquemas en diferencias exactos y no estándar para distintos tipos de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales con retardo (EDR). Los esquemas en diferencias exactos se definen como aquellos para los que la ecuación en diferencias tiene la misma solución general que la ecuación diferencial asociada. Los denominados métodos de diferencias finitas no estándar [1], basados en las reglas de modelado sugeridas por distintos ejemplos de esquemas exactos, proporcionan para problemas o grupos de problemas particulares soluciones consistentes con las propiedades dinámicas de las soluciones exactas. En esta charla repasamos la construcción de esquemas exactos y no estándar para EDR lineales [2], sistemas acoplados de EDR con coeficientes matriciales que conmutan [3], sistemas lineales generales de EDR [4], EDR de tipo neutral [5] y EDR de segundo orden [6], analizando sus propiedades de convergencia y estabilidad.

Palabras clave: EDR; Esquemas exactos; Métodos no estándar; Convergencia y estabilidad.

Referencias

- [1] R. E. Mickens (2021) *Nonstandard Finite Difference Schemes: Methodology and Applications*. World Scientific.
- [2] M. A. García, M. A. Castro, J. A. Martín, F. Rodríguez (2018). Exact and nonstandard numerical schemes for linear delay differential models. *Appl. Math. Comput.*, 338, 337–345.
- [3] M. A. García, M. A. Castro, J. A. Martín, F. Rodríguez (2019). Exact and nonstandard finite difference schemes for coupled linear delay differential systems. *Mathematics*, 7, 1038, 2019.
- [4] M. A. Castro, A. Sirvent, F. Rodríguez (2021). Nonstandard finite difference schemes for general linear delay differential systems. *Math. Methods Appl. Sci.*, 44, 3985–3999.
- [5] C. J. Mayorga, M. A. Castro, A. Sirvent, F. Rodríguez (2023). On the Construction of Exact Numerical Schemes for Linear Delay Models. *Mathematics*, 11(8), 1836.
- [6] M. A. Castro, C. J. Mayorga, A. Sirvent, F. Rodríguez (2023). Exact numerical solutions and high order nonstandard difference schemes for a second order delay differential equation. *Math. Methods Appl. Sci.*, 46(17), 17962–17979.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación y la Agencia Estatal de Investigación (PID2021-125517OB-I00) y la Conselleria de Innovación, Universidades, Ciencia y Sociedad Digital de la Generalitat Valenciana (CIPROM/2021/001).

Una técnica mixta de integración numérica en la circunferencia unidad empleando ceros de polinomios para-ortogonales

Ruymán Cruz-Barroso, Lidia Fernández, Francisco Marcellán

Departamento de Análisis Matemático e Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones (IMAUULL),
Universidad de La Laguna

rcruzb@ull.edu.es

Sea μ una medida positiva de Borel definida en $[-\pi, \pi)$. En esta charla se considerará el problema de estimar numérica y eficientemente integrales de la forma

$$I_\mu(F) = \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\theta}) d\mu(\theta). \quad (1)$$

Las conocidas *fórmulas de cuadratura de Szegő*, introducidas en [4], representan en la circunferencia unidad las reglas de integración numérica análogas a las clásicas *fórmulas de cuadratura Gaussianas* para la estimación de integrales con respecto a medidas soportadas en subconjuntos de la recta real. Las fórmulas de Szegő son de naturaleza interpolatoria, siendo la función F en (1) una función Riemann-Stieltjes integrable con respecto a μ , y toman como nodos los ceros de polinomios para-ortogonales con respecto a μ , que se encuentran en la circunferencia unidad (véase por ejemplo, [1, 2, 4]).

En numerosos contextos científicos ocurre que la función F no se conoce de manera explícita, sino que proviene de valores obtenidos por dispositivos, o medidas experimentales de diversos tipos. Por esta razón se han introducido recientemente nuevas técnicas de integración numérica con respecto a medidas soportadas en el eje real, aprovechando la información discreta disponible del integrando y llevando a cabo una técnica mixta entre interpolación y regresión, véase [3].

El objetivo de esta charla es introducir por primera vez en la literatura una técnica mixta de naturaleza similar para la estimación de integrales en la circunferencia unidad, presentando así un proceso numérico alternativo a las fórmulas de cuadratura de Szegő.

Palabras clave: Integración numérica; interpolación; regresión; circunferencia unidad; polinomios para-ortogonales.

Referencias

- [1] A. Bultheel, R. Cruz-Barroso and C. Díaz Mendoza (2022). Zeros of quasi-paraorthogonal polynomials and positive quadrature. *J. Comput. Appl. Math.* 407, 114039
- [2] R. Cruz-Barroso, C. Díaz Mendoza and F. Perdomo Pío (2017). Szegő-type quadrature formulas. *J. Math. Anal. Appl.* 455 No. 1, 592–605.
- [3] F. Dell’Accio, F. Marcellán and F. Nudo (2024). An extension of a mixed interpolation-regression method using zeros of orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* 450, 116010.
- [4] W.B. Jones, O. Njåstad and W.J. Thron (1989). Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle, *Bull. London Math. Soc.* 21, 113–152.

Deep Operator Networks in Control Theory: concepts and applications

Umberto Biccari

DeustoTech, Universidad de Deusto, Bilbao

umberto.biccari@deusto.es

Deep Operator Networks (DeepONets) have recently emerged as a powerful approach for learning nonlinear operators directly from data. Unlike standard neural networks, which approximate functions, DeepONets approximate mappings between function spaces, making them particularly suitable for problems governed by differential equations. This capability is highly relevant for digital twin technology, where one seeks fast, data-enabled surrogates of physical systems that can be queried for prediction, monitoring, and control. In this talk, I will introduce the DeepONet framework and discuss its role in control theory, focusing on how operator learning can approximate control-to-state maps and support the design of feedback laws. I will present two illustrative control applications: a simple case of boundary control for the 1D wave equation, and a more challenging case of backstepping stabilization for a stochastic system. These examples demonstrate how DeepONets can act as digital twins of controlled dynamical systems, enabling real-time emulation of dynamics under varying inputs and offering new opportunities for control-oriented digital twin design.

Keywords: Deep Operator Networks; Robust control; Universal approximation; Set-valued maps.

References

- [1] K. Lyu, U. Biccari, J. Wang (2025). Robust stabilization of hyperbolic PDE-ODE systems via Neural Operator-approximated gain kernels. arXiv preprint arXiv:2508.03242.
- [2] C. J. Garcia-Cervera, M. Kessler, P. Pedregal, F. Periago (2025). Universal approximation of set-valued maps and DeepONet approximation of the controllability map. Preprint.

Radial spectra of the 1–Laplacian in the annulus

Sergio Segura de León, José C. Sabina de Lis

Departament d'Anàlisi Matemàtica, Universitat de València

sergio.segura@uv.es

This talk is concerned with the behaviour, as p goes to 1, of eigenvalues of the p -Laplace operator associated to radial eigenfunctions. The Dirichlet, Neumann and Robin conditions are analyzed in an annulus. In each case we prove that there exist the limits of both eigenvalues and eigenfunctions and the limits define in a proper way an eigenpair of the 1-Laplacian.

Keywords: 1-Laplacian operator, Radial eigenvalues, Dirichlet conditions, Neumann conditions, Robin conditions.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con José C. Sabina de Lis. Proyecto parcialmente financiado por la Ayuda PID2022-136589NB-I00 subvencionada por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por la RED2022-134784-T también subvencionada por MCIN/AEI/10.13039/501100-011033. .

Ocurrencia de ruptura de simetría en problemas de tipo Hénon que involucran el operador 1-laplaciano

Yino Beto Cueva Carranza

Departamento de Matemática e Computação, Universidade Estadual Paulista-Brasil

yino.cueva@unesp.br

En este trabajo estudiamos el siguiente problema elíptico no homogéneo de tipo Hénon

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = |x|^\beta f(u) & \text{en } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \quad (1)$$

donde $B := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$, $N \geq 4$, $\beta > 0$ y f es una función localmente Hölder continua que satisface, $f(s) \geq 0$, para todo $s > 0$ y $f(s) = 0$ para todo $s \leq 0$.

En las últimas décadas, este tipo de problema ha atraído la atención de varios matemáticos, después del trabajo pionero [2], principalmente debido a cuestiones relacionadas con el cambio en los exponentes críticos de Sobolev y con la presencia del fenómeno de ruptura de simetría. Más específicamente, en [3], el autor mostró la existencia de una solución radial, mientras que en [1], los autores conjeturaron que la solución de estado fundamental asociada no era radialmente simétrica.

Establecemos el siguiente resultado de existencia:

Teorema. *Bajo ciertas hipótesis sobre f , el problema (1) admite tanto una solución radial como una no radial para β suficientemente grande.*

Este resultado confirma la ocurrencia de ruptura de simetría para el problema (1) cuando β es suficientemente grande, y para demostrarlo emplearemos un método de aproximación en el cual la solución se obtiene como el límite de soluciones de problemas del tipo p -laplaciano. Además, en un paso crucial, es necesario emplear el concepto de variedad de Nehari para funcionales en espacios BV .

Palabras clave: Operador 1-Laplaciano; Problema de Hénon no Homogeneo; Ruptura de simetría.

Referencias

- [1] G. Chen, W.M. Ni and J. Zhou (2000). Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engng.*, 10, 1565–1612 .
- [2] M. Hénon (1973). Numerical experiments on the stability of spherical stellar systems. *Astronom. Astrophys.*, 24, 229–238.
- [3] W.M. Ni (1982). A nonlinear Dirichlet problem on the unit ball and its applications. *Indiana Univ.Math. J.*, 31, 801–807.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Marcos T. O. Pimenta, Giovany M. Figueiredo y Olimpio Hiroshi Miyagaki . Proyecto financiado por FAPESP 2024/13814-0, 2024/02017-2, CNPq 153827/2024-6, Brazil.

High multiplicity and global structure of coexistence states in a predator-prey model with saturation

Eduardo Muñoz-Hernández, Kousuke Kuto, Julián López-Gómez

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada,
Universidad Complutense de Madrid

eduardmu@ucm.es

In this talk, we analyze the global structure and multiplicity of coexistence states of the following one-dimensional Holling–Tanner predator-prey model with Neumann boundary conditions

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u - a(x)u^2 - b \frac{uv}{1+\gamma u} & \text{in } (0, 1), \\ -v'' = \mu v - d v^2 + c(x) \frac{uv}{1+\gamma u} & \text{in } (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where $a, c \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ are non-negative, $b > 0$ and $d > 0$ are positive constants, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ and $\gamma > 0$ represents the saturation rate of the predator, v , in the presence of abundance of prey u .

The first aim of this talk is to show that (1) can have an arbitrarily large number of coexistence states for sufficiently large $\gamma > 0$. Namely, as $\gamma \uparrow +\infty$, the shadow system of (1) is a single autonomous second order equation, for which phase plane analysis can be used to prove the following:

if $\mu \in (\frac{d}{b}(2\kappa\pi)^2, \frac{d}{b}(2(\kappa+1)\pi)^2]$ for some integer $\kappa \geq 1$, then, the set of positive solutions of the shadow system consists of the constant solution, w_0 , plus κ closed nested loops, $\mathcal{C}_n$, $n \in \{1, \dots, \kappa\}$, bifurcating from w_0 at a family of critical values $\lambda_n^\pm = \lambda_n^\pm(\mu)$ such that

$$0 < \lambda_1^- < \lambda_2^- < \dots < \lambda_\kappa^- < \frac{b\mu}{2d} < \lambda_\kappa^+ < \dots < \lambda_2^+ < \lambda_1^+ < \frac{b\mu}{d}.$$

The second aim of this talk is to show that the above high multiplicity result is maintained in system (1) for sufficiently large $\gamma > 0$, except, at most, at finitely many values of the parameter λ .

Keywords: Predator-prey systems of Holling–Tanner type; Multiplicity of coexistence states; Bifurcation Theory; Stability and Phase plane analysis.

References

- [1] K. Kuto, J. López-Gómez, E. Muñoz-Hernández (2025). High multiplicity and global structure of coexistence states in a predator-prey model with saturation, *Journal of Differential Equations*, *accepted*.

Acknowledgments. Joint work with K. Kuto (Waseda University) and J. López-Gómez (Universidad Complutense de Madrid). This work has been written under the auspices of the Ministry of Science and Innovation of Spain under Research Grants PID2021-123343NB-I00 and PID2024-155890NB-I00, and the IMI of UCM. Professor Kuto has been partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP25K00917.

Numerical approximation of singularly perturbed convection-diffusion elliptic problems with a non-smooth forcing term

José Luis Gracia, Eugene O’Riordan

IUMA y Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

jlgracia@unizar.es

Singularly perturbed elliptic problems of convection–diffusion type with smooth coefficients have been extensively analyzed in the literature (see, for example, [2]). The diffusion coefficient (or singular perturbation parameter) can take arbitrarily small values, leading to convection-dominated behavior. The solution of such problems exhibits a multiscale character, with large gradients confined to narrow regions near the boundary and at the corners of the domain, known respectively as boundary and corner layers. In this work, the forcing term is additionally assumed to be non-smooth, either containing an interior layer or being discontinuous across an interface orthogonal to the flow. The former can be viewed as a regularization of the latter, and such non-smoothness causes an interior layer in the solution. For both classes of problems, a decomposition of the solution is constructed, and pointwise bounds on the partial derivatives of its components are established, showing the location and width of the layer regions. The numerical approximation is based on an upwind finite difference scheme defined on a layer-adapted Shishkin mesh condensing in the layer regions. Parameter-uniform error bounds in the maximum norm are derived, showing that the scheme is robust (or uniformly convergent) with respect to the diffusion parameter. The error bounds prove that the method is almost first-order uniformly convergent and numerical results are presented to illustrate the performance of both numerical methods. The technical details of this work can be found in [1].

Keywords: Convection-diffusion ; Interior layer; Shishkin mesh.

References

- [1] J.L. Gracia, E. O’Riordan (2025). Singularly perturbed convection-diffusion elliptic problems with a non-smooth forcing term. *Comp. and Maths. with Appls.*, 196, 458–476.
- [2] J.J.H. Miller, E. O’Riordan, G.I. Shishkin, (2012) *Fitted Numerical Methods For Singular Perturbation Problems Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions*. Revised Edition, World Scientific Publishing.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Eugene O’Riordan (Dublin City University, Irlanda) . Proyecto parcialmente financiado por el Instituto Universitario de Investigación de Matemáticas Aplicaciones de la Universidad de Zaragoza (IUMA), el Gobierno de Aragón y el proyecto PID2022-141385NB-I00.

Adaptive nearest neighbors for partial labels learning

Nicolás Errandonea¹, José Antonio Lozano^{1,2}, Santiago Mazuelas^{1,3}, Sanjoy Dasgupta⁴

¹Basque Center of Applied Mathematics (BCAM), ² University of the Basque Country (EHU),
³IKERBASQUE-Basque Foundation for Science, ⁴University of California San Diego (USCD)

nerrandonea@bcamath.org

Partial labels learning (PLL) is a weakly supervised setting in which each instance is associated with a bag of labels rather than the true label, introducing ambiguity during training. Existing PLL methods are tailored to specific assumptions and fail in more general scenarios. While nearest-neighbor approaches do not assume restrictive assumptions, they require careful selection of the number of neighbors—a task that is particularly challenging in PLL. In this work, we propose a nearest-neighbor method for PLL that adaptively determines the optimal number of neighbors for each instance and is effective in general scenarios. We provide theoretical performance guarantees for our method under more general conditions than previous work. Experimental results demonstrate that our method performs comparably to k NN with the best choice of the number of neighbors and consistently outperforms state-of-the-art approaches in general PLL scenarios.

Palabras clave: aprendizaje con etiquetas parciales; garantías de rendimiento; vecinos más cercanos; etiquetas candidatas.

References

- [1] E. Hüllermeier, J. Beringer (2006). Learning from ambiguously labeled examples.
- [2] T. Cour, B. Sapp, B. Taskar (2011). Learning from partial labels. *The Journal of Machine Learning Research*, 12, 1501–1536.
- [3] A. Balsubramani, S. Dasgupta, S. Moran, et al. (2019). An adaptive nearest neighbor rule for classification. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 32.
- [4] J. Lv, B. Liu, L. Feng, N. Xu, M. Xu, B. An, G. Niu, X. Geng, M. Sugiyama (2023). On the robustness of average losses for partial-label learning. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 46(5), 2569–2583.

Espacios de aproximación, espacios discretos de Lorentz y el algoritmo *greedy*

Pablo M. Berná

Departamento de Matemáticas, CUNEF Universidad

pablo.berna@cunef.edu

En esta charla presentaremos unos resultados que permiten la identificación de los espacios de aproximación con pesos (asociados a una base en un espacio quasi-Banach) con ciertos espacios discretos de Lorentz. Además, se establecen condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales los espacios de aproximación coinciden, además, con las clases definidas por el algoritmo greedy y por el algoritmo Chebyshev-greedy.

Palabras clave: Algoritmo greedy, bases greedy, espacios de aproximación

Referencias

[1] M. Berasategui, P. M. Berná, A. García. Approximation spaces, greedy classes and Lorentz spaces. *Submitted*, <https://arxiv.org/pdf/2411.13678>.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Miguel Berasategui (Universidad de Buenos Aires) y Andrea García (CEU Universities y CUNEF Universidad). Proyecto financiado por PID2022-142202NB-I00 (Agencia Estatal de Investigación).

Generalized RKBS and the Design of Abstract Neural Networks: A Functional Analytic Approach

Raúl Felipe-Sosa

Escuela Politécnica Superior, Universidad Nebrija

rfelipe@nebrija.es

In this talk, I will present a generalization of Reproducing Kernel Banach Spaces (RKBS), which we call *Generalized Reproducing Kernel Banach Spaces* (GRKBS). The starting point is a recent result [1] showing that classical fully connected neural networks can be interpreted as finite-dimensional subspaces of an RKBS. The proposed generalization allows us to work with function spaces whose values lie in Banach spaces, and, on this basis, to construct *Abstract Neural Networks* (AbsNN) as compositions of GRKBS. This framework provides a natural way to model neural architectures that go beyond traditional machine learning paradigms, incorporating physically informed structures governed by differential equations. In the talk, I will present the unified definition of GRKBS, structural uniqueness results, and the existence of sparse minimizers for the associated abstract training problem. Finally, I will discuss how this framework bridges functional analysis and the design of new neural architectures, with potential applications in approximation theory and mathematical modeling.

Keywords: generalized RKBS; abstract training problem; abstract neural structures; sparsity solutions

References

- [1] F. Bartolucci, E. DeVito, L. Rosasco, S. Vigogna (2023). Understanding neural networks with reproducing kernel Banach spaces. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 62, 194–236.
- [2] R. R. LIN (2022) On Reproducing Kernel Banach Spaces: Generic Definitions and Unified Framework of Constructions. *Acta Math. Sin. Engl. Ser.*, 38, 1459–1483.
- [3] K. Bredies, M. Carioni (2020) Sparsity of solutions for variational inverse problems with finite-dimensional data, *Calc. Var.*, 59.

Robust Mean Estimation with Median-of-Means: Upper and Lower Bounds in Adversarial Settings

Xabier de Juan¹, Santiago Mazuelas^{1,2}

¹Basque Center of Applied Mathematics (BCAM),

²IKERBASQUE-Basque Foundation for Science

xdejuan@bcamath.org

The Median-of-Means (MoM) is a one-dimensional robust estimator widely used in machine learning and known to be (minimax) optimal when samples are i.i.d. In more challenging scenarios, samples may be contaminated by an adversary that can inspect and modify the data. Previous work has established the suitability of MoM in some contaminated settings, but its (minimax) optimality and limitations under adversarial contamination remain unclear beyond the Gaussian case. In this talk, we present upper and lower bounds on the error of MoM under adversarial contamination for several classes of distributions. In particular, we show that MoM is (minimax) optimal in the class of distributions with finite variance, as well as in the class of distributions with infinite variance but finite absolute $(1+r)$ -th moment. We further provide lower bounds that match the order of our upper bounds and demonstrate that MoM is sub-optimal for light-tailed distributions.

This talk is based on a paper presented in NeurIPS 2025 by the same authors.

Palabras clave: estimación de la media; contaminación adversaria; estadística robusta; desigualdades de concentración

References

- [1] G. Lugosi, S. Mendelson (2021). Robust multivariate mean estimation: The optimality of trimmed mean. *The Annals of Statistics*, 49(1), 393–410.
- [2] S. Bhatt, G. Fang, P. Li, G. Samorodnitsky (2022). Minimax M-estimation under Adversarial Contamination, *Proceedings of the 39th International Conference on Machine Learning*, Proceedings of Machine Learning Research, vol. 162, PMLR, 1906–1924.
- [3] P. Laforge, G. Staerman, S. Cléménçon (2021). Generalization Bounds in the Presence of Outliers: a Median-of-Means Study, *Proceedings of the 38th International Conference on Machine Learning*, Proceedings of Machine Learning Research, vol. 139, PMLR, 5937–5947.

Dos nuevas reglas de reparto para el problema de asignación de peajes en una autopista

Paula Soto-Rodríguez, Balbina Casas-Méndez, Alejandro Saavedra-Nieves

CITMAga, Departamento de Estadística, Análisis Matemático y Optimización,
Universidad de Santiago de Compostela

paula.soto.rodriguez@rai.usc.es

El problema de asignación de peajes en una autopista, introducido por [1], consiste en decidir cómo repartir las tarifas recolectadas de los usuarios de una autopista entre los distintos tramos que la componen. En este trabajo presentamos dos nuevas reglas de reparto para este contexto. Caracterizamos ambas reglas axiomáticamente y estudiamos su relación con soluciones clásicas en teoría de juegos cooperativos. Asimismo, obtenemos una expresión para el núcleo del juego cooperativo asociado, analizamos la estabilidad de las soluciones y establecemos condiciones suficientes para que un método pertenezca al núcleo. Concluimos el estudio metodológico con la introducción de una familia general de reglas de asignación, que tiene como miembros a las dos reglas mencionadas anteriormente, y la presentación de algunas de sus propiedades. Finalmente, evaluamos el comportamiento de los métodos utilizando datos procedentes de un caso real.

Palabras clave: teoría de juegos cooperativos; asignación de tarifas recolectadas de autopistas; juegos con comunicación restringida por un grafo lineal; axiomatización de soluciones; aplicación a datos reales.

Referencias

[1] H. Wu, R. van den Brink, A. Estévez-Fernández (2024). Highway toll allocation. *Transportation Research Part B: Methodological* 180:102889.

Agradecimientos. Este trabajo forma parte del proyecto de I+D+i PID2021-124030NB-C32, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/, España, y por “FEDER Una manera de hacer Europa”/UE. Esta investigación también fue financiada por los Grupos de Referencia Competitiva ED431C 2025/03 de la Consellería de Cultura, Educación e Universidades, Xunta de Galicia, España.

Normas equivalentes en los espacios funcionales

$L^p(\mathbb{R}^+)$ y $Ces_p(\mathbb{R}^+)$

Achraf Ben Said

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada,
Universidad Complutense de Madrid

achbensa@uclm.es

Sea $1 < p < \infty$. El espacio de Cesàro $Ces_p(\mathbb{R}^+)$ está formado por las funciones f tales que

$$\|Hf\|_p < \infty,$$

donde H es el operador de Hardy, definido por $Hf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Por la desigualdad de Hardy (véase [6]), se tiene la inclusión

$$L^p(\mathbb{R}^+) \subset Ces_p(\mathbb{R}^+),$$

siendo esta inclusión estricta. Una línea de investigación de gran interés consiste en encontrar normas equivalentes a las normas usuales en los espacios $L^p(\mathbb{R}^+)$ y $Ces_p(\mathbb{R}^+)$ dando las mejores constantes en dichas equivalencias (véase, por ejemplo, [3, 4, 5, 7, 10, 8]).

En esta charla, presentaremos nuestras contribuciones recientes (contenidas en [1] y [2]) y que son parte de mi tesis doctoral, así como algunos problemas abiertos dentro de estos temas.

Palabras clave: Optimal Constants; Hardy's inequalities; Hardy's Operator; Cesàro Spaces.

Referencias

- [1] A. Ben Said, S. Boza, J. Soria (2024). The norm of Hardy-type oscillation operators in the discrete and continuous settings. Preprint.
- [2] A. Ben Said, Sinnamon (2025). G. Best bounds for the dual Hardy operator minus identity on decreasing functions. *Ann. Mat. Pura Appl.*
- [3] S. Boza, J. Soria (2011). Solution to a conjecture on the norm of the Hardy operator minus the Identity. *J. Funct. Anal.*, 260, 1020–1028.
- [4] S. Boza, J. Soria (2023). The norm of the Cesàro's operator minus identity and related operators acting on decreasing sequences. *J. Approx. Theory*, 292.
- [5] S. Boza, J. Soria (2019). Averaging operators on decreasing or positive functions: Equivalence and optimal bounds. *J. Approx. Theory*, 237, 135–152.
- [6] G. H. Hardy (1920). Note on a theorem of Hilbert. *Mathematische Zeitschrift*, 6, 314–317.
- [7] V. I. Kolyada (2014). Optimal relationships between L^p -norms for the Hardy operator and its dual. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 193, 423–430.
- [8] N. Kruglyak, E. Setterqvist (2008). Sharp estimates for the identity minus Hardy operator on the cone of decreasing functions. *Proc. Am. Math. Soc.*, 136, 2005–2013.
- [9] G. Sinnamon (2022). Norm of the discrete Cesàro operator minus identity. *Math. Inequal. Appl.*, 25, 41–48.
- [10] M. Strzelecki (2020). Hardy's operator minus identity and power weights. *J. Funct. Anal.*, 279, 108532.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con S. Boza, J. Soria y G. Sinnamon. Proyecto parcialmente financiado por el proyecto PID2020-113048GB-I00 (MCIN/AEI/10.13039/501100011033).

Estructuras semi-riemannianas asociadas a un espaciotiempo galileano

Daniel de la Fuente

Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo

fuentedaniel@uniovi.es

Una estructura leibniziana de un espaciotiempo no relativista M viene dada por un par (Ω, g) , donde Ω es una 1-forma (el “reloj absoluto”) y g una métrica de Riemann definida sobre el núcleo de Ω . Contrariamente a lo que ocurre en el marco relativista, no hay una única conexión libre de torsión y galileana (es decir, compatible con una estructura leibniziana). Además, las conexiones galileanas casi nunca se corresponden con la conexión de Levi-Civita de alguna métrica semi-riemanniana. En esta ponencia investigaremos cómo es el espacio moduli de estas conexiones, y presentaremos estructuras semi-riemannianas adaptadas a ciertos campos de observadores en un espaciotiempo galileano que permiten obtener resultados sobre su estructura topológica. Finalmente, revisaremos brevemente la correspondencia entre las geodésicas de una conexión galileana y su levantamiento de Eisenhart a geodésicas luminosas de una variedad de Lorentz con una dimensión adicional.

Palabras clave: Conexión galileana; métrica semi-riemanniana; fórmula de Koszul; levantamiento de Eisenhart.

Referencias

- [1] X. Bekaert, K. Morand (2016). Connections and dynamical trajectories in generalised Newton-Cartan gravity I. An intrinsic view. *J. Math. Phys.*, 57, 1–44.
- [2] D. de la Fuente, J.A. Pelegrín, R.M. Rubio (2024). Semi-riemannian structures for symmetric Galilean spacetimes. *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat.*, 118, 164.
- [3] E. Minguzzi (2007). Eisenhart’s theorem and the causal simplicity of Eisenhart’s spacetime. *Class. Quantum Grav.*, 24, 27812807.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación con referencia PID2020-116126GB-I00.

On local Liakopoulos-Meyer type inequalities

Beatriz Marín Gimeno

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

b.maringimeno@um.es

Given $K \subseteq \mathbb{R}^n$, a convex body (a convex and compact set with non-empty interior), we can bound its volume by the volume of the box whose edges have lengths equal to the volumes of the projections of K onto the coordinate axes. Using this idea, in 1949, Loomis and Whitney [5] proved, by approximating sets with boxes, that

$$|K|^{n-1} \leq \prod_{i=1}^n |P_{e_i^\perp} K|$$

where $|\cdot|$ denotes volume, and $P_{e_i^\perp} K$ denotes the projection of K onto $\langle e_i \rangle^\perp$. Later, Bollobás and Thomason [2] generalized the previous result to the volumes of projections of convex bodies onto other subspaces. Dual results proved by Meyer [6] and Liakopoulos [4] provide lower bounds for the volume of K , in which projections are replaced by sections.

Local results of this type were introduced systematically in 2018 by Brazitikos et al. [3] and the corresponding ones for projections were completely solved by Alonso-Gutiérrez et al. [1]. The aim of this talk is to present the optimal solution in some cases to the local inequalities for sections and its functional versions.

Keywords: volume; convex body; log-concave function; section; projection.

References

- [1] D. Alonso-Gutiérrez, J. Bernués, S. Brazitikos, A. Carbery, On affine invariant and local Loomis–Whitney type inequalities, *J. Lond. Math. Soc.*, 103 (2021), no. 4, 1377–1401.
- [2] B. Bollobás, A. Thomason, Projections of bodies and hereditary properties of hypergraphs, *Bull. London Math. Soc.*, 27 (1995), no. 5, 417–424.
- [3] S. Brazitikos, A. Giannopoulos, D. M. Liakopoulos, Uniform cover inequalities for the volume of coordinate sections and projections of convex bodies, *Adv. Geom.*, 18 (2018), no. 3, 345–354.
- [4] D.M. Liakopoulos, Reverse Brascamp-Lieb inequality and the dual Bollobás-Thomason inequality, *Arch. Math. (Basel)*, 112 (2019), no. 3, 293–304.
- [5] L. H. Loomis, H. Whitney, An inequality related to the isoperimetric inequality, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 961–962.
- [6] M. Meyer, A volume inequality concerning sections of convex set, *Bull. London Math. Soc.*, 20 (1988), no. 2, 151–155.

Acknowledgments. This is a joint work with Luis J. Alías and Bernardo González Merino. This work is partially supported by the grants PID2021-124157NB-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ 'ERDF A way of making Europe', Spain and PID2022-136320NB-I00 project / AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE; B. Marín Gimeno is also supported by Contratos Predoctorales FPU-Universidad de Murcia 2024, Spain.

Effective bounds for compactness of semialgebraic sets defined over the rationals

Joel Hurtado, Carlos D'Andrea

Facultat de Matemàtiques i Estadística, Universitat Politècnica de Catalunya

joel.hurtado@estudiantat.upc.edu

Semialgebraic sets play a central role in real algebraic geometry, being the basic construction of this field. Many results around them such as Schmüdgen's Positivstellensatz [1] and numerous subsequent works, rely on the compactness of semialgebraic sets, a question that is not trivial to address from an algorithmic point of view.

We study this problem for polynomials in several variables with rational coefficients. Our aim is to determine the radius of a ball containing the semialgebraic set defined by the input in terms of the coefficients and degrees of them, following a similar approach as in [2].

We also present results relating positivity certificates for real multivariate polynomials and the property of archimedeanity of quadratic modules.

Keywords: Computational Algebraic Geometry; Semialgebraic sets; Compactness; Polynomials; Non-negativity certificates.

References

- [1] K. Schmüdgen (1991). The K-moment problem for compact semi-algebraic sets. *Math. Ann.* 289 (2), 203–206.
- [2] J. Gabriela, D. Perrucci, E. Tsigaridas (2013). On the minimum of a polynomial function on a basic closed semialgebraic set and applications. *SIAM J. Optim.* 23 (2013), no. 1, 241–255.

Cuando la geometría enumerativa no es enumerativa

Alberto Cobos Rábano

Departamento de Matemáticas, KU Leuven

alberto.cobosrabano@kuleuven.be

Una de las principales teorías en la geometría enumerativa son los invariantes de Gromov-Witten. Estos pretenden contar el número de curvas dentro de una variedad no singular y proyectiva, fijados ciertos invariantes y condiciones geométricas. Por ejemplo, el número de curvas racionales de grado d en el plano proyectivo pasando por $3d - 1$ puntos en posición general coincide con el invariante de Gromov-Witten correspondiente.

Sin embargo, si nos alejamos del espacio proyectivo o consideramos género mayor que cero, dichos invariantes no son realmente enumerativos; es decir, no coinciden con el verdadero número de curvas que se pretende estudiar.

El objetivo de esta charla es explicar cómo este fenómeno se deduce de la presencia de varias componentes irreducibles en el espacio de móduli de morfismos estables.

Palabras clave: geometría algebraica; geometría enumerativa, invariantes de Gromov-Witten; espacios de móduli.

Referencias

- [1] A. Cobos Rabano, E. Mann, C. Manolache, R. Picciotto (2023). Desingularizations of sheaves and higher genus reduced Gromov-Witten invariants. *arXiv preprint*, arXiv:2310.06727.
- [2] A. Cobos Rabano, E. Mann (2025). Irreducible components of moduli spaces of maps to smooth projective toric varieties in genus 0. *arXiv preprint*, arXiv:2506.16221.

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con Cristina Manolache, Etienne Mann y Renata Picciotto. Proyecto parcialmente financiado por FWO-G0B3123N.

Automated derivation of several geometry theorems from a given one

M. Pilar Vélez, Zoltán Kovács, Tomás Recio

Departamento de Matemáticas y Física, Universidad Antonio de Nebrija

pvelez@nebrija.es

GeoGebra Discovery (<https://github.com/kovzol/geogebra-discovery>) is an experimental version of GeoGebra with expanded automated reasoning features, allowing the user to automatically discover relations holding between different elements of a construction, to confirm or deny or to suggest some extra hypotheses for the truth of a given statement [2, 3].

Recently GeoGebra Discovery has included the `ShowProof` command [1] that outputs an algebraic proof by contradiction of the statement, providing an expression of 1 as a combination of the hypotheses and the negation of the thesis multiplied by certain polynomials.

In our presentation we will describe a new, quite surprising, consequence of such expression: the automated derivation of many new true statements from the given one. That is: one theorem implies many others! This will be illustrated by using Maple, as currently this protocol has not yet being implemented in GeoGebra Discovery.

Keywords: Automated theorem proving; Polynomial ideal; GeoGebra Discovery; Automated derivation of theorems.

References

- [1] Z. Kovács, B. Parisse, T. Recio, M.P. Vélez, and J. H. Yu (2025). The `ShowProof` command in GeoGebra Discovery: Towards the automated ranking of elementary geometry theorems. *ACM Communications in Computer Algebra*, Vol. 58, No. 2, Issue 228, June 2024, 27-30 (published 10 Jan. 2025), <https://doi.org/10.1145/3712023.3712026>.
- [2] Z. Kovács, T. Recio, and M. P. Vélez (2019) Detecting truth, just on parts, *Revista Matemática Complutense*, 32, 451–474, <https://doi.org/10.1007/s13163-018-0286-1>.
- [3] Z. Kovács, T. Recio, and M. P. Vélez (2022) Automated reasoning tools with GeoGebra: What are they? What are they good for?, en P.R. Richard, M.P. Vélez and S. Van Vaerenberg, editores, *Mathematics Education the Age of Artificial Intelligence*, Mathematics Education in the Digital Era, vol. 17, Springer: Cham, Switzerland, 23–45. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_2.

Agradecimientos. Parcialmente financiado por Comunidad de Madrid a través del Proyecto “Inteligencia aumentada en educación Matemática mediante modelización, razonamiento automático e inteligencia” (IAxEM-CM) PHS 2024/PH HUM 383).

Stonehenge: cálculo del número π empleado en su diseño y análisis geométrico de la Piedra del Altar (Nº80)

Vicente Ibáñez Orts

capblanch@camping-capblanch.com

En este artículo confirmamos que la unidad de medida empleada en el diseño del círculo de *Piedras Sarsens* es el pie de 26.70 cm, como ya lo propuso William Stukeley (1790), [2]. Según esta unidad cada dintel tiene unas dimensiones de $3 \times 4 \times 12$. De modo que la longitud de un círculo de 30 dinteles de 12 unidades es 360 pies. Para esta longitud el valor del diámetro entero que mejor se ajusta a esa circunferencia es 115. Por ello, la fracción $360/115$ es la aproximación al número π que se empleó en Stonehenge, y proponemos que se llame: “*Aproximación a π de Stonehenge*”. Esta aproximación es original y no está descrita hasta ahora. También proponemos que las dimensiones de la *Piedra del Altar* (Nº80), siguen entre sí una sucesión armónica (H), en contra de la opinión general que desconoce la relación que hay entre ellas. Según Anthony Johnson, en su libro “*Solving Stonehenge, the new key to an ancient enigma*” (2008) [1], en el capítulo 5, página 134, las dimensiones de la Piedra del Altar son: $4,40 \times 0,90 \times 0,50$ m, de modo que $H = (2 \times 4,4 \times 0,5) / (4,4 + 0,5) = 4,4/4,9 = 0,898 \approx 0,90$, tal como queríamos demostrar.

Palabras clave: Stonehenge; número π ; unidad medida; pie Stonehenge; piedra altar.

Referencias

- [1] A. Johnson. *Solving Stonehenge. The new key to an ancient enigma*. Thames & Hudson Ltd. London, 2008.
- [2] W. Stukeley. *Stonehenge, a temple restor'd to the British Druids*. Republished 2007 by Forgotten Books, 1790.

Pohozaev identity for the Spectral Fractional Laplacian

Itahisa Barrios-Cubas, Matteo Bonforte, Mar González and Clara Torres-Latorre.

Departamento de matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid - ICMAT

itahisa.barrios@uam.es

In this talk, we present a Pohozaev identity for the Spectral Fractional Laplacian (SFL). This identity allows us to prove non-existence for certain semi-linear problems. The first work on non-local Pohozaev identities goes back to the influential paper by Ros-Otón and Serra in 2014, where they consider the Restricted Fractional Laplacian (RFL) on $\mathbb{R}^N$. However, in our setting, boundary behavior is very different and the integration by parts approach by Ros-Otón and Serra cannot be used. Instead, we use a spectral approach to obtain a new identity written as a Schur product in which we recover the classical Pohozaev identity for the Laplacian by means of a transition matrix.

Keywords: Semi-linear elliptic PDEs; Non-local operators; Pohozaev identity; Spectral Fractional Laplacian.

References

- [1] M. Bonforte, A. Figalli, J. L. Vázquez (2018). Sharp boundary behaviour of solutions to semilinear nonlocal elliptic equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 57, 1–34.
- [2] S. Pohozaev (1965). Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. *Soviet Math. Doklady*, vol. 6, 1408–1411.
- [3] X. Ros-Oton, J. Serra (2014). The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: regularity up to the boundary. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 101, 275–302.
- [4] X. Ros-Oton, J. Serra (2014). The Pohozaev identity for the fractional Laplacian. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 213, 587–628.

Acknowledgments. I. Barrios-Cubas acknowledges financial support from grants PID2020-113596GB-I00, PID2023-150166NB-I00, RED2022-134784-T, all funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 (Ministry of Science and Innovation, Spain), and the “Severo Ochoa Programme for Centers of Excellence in R&D” (CEX2019-000904-S), and the financial support from the FPI-grant PRE2021-097207 (Spain).

Fractional fast diffusion with initial data a Radon measure

Ruiz-Cases, Jorge

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

jorge.ruizc@uam.es

We establish a complete Widder Theory for the fractional fast diffusion equation. Our work focuses on nonnegative solutions satisfying a certain integral size condition at infinity. We prove that these solutions possess a Radon measure as initial trace, and prove the existence and uniqueness of solutions originating from such initial data. The uniqueness result is the main issue. Most of its difficulty comes from the singular character of the nonlinearity.

Keywords: Nonlocal singular diffusion; uniqueness; very weak solutions.

References

- [1] Bonforte, M., and Vázquez, J. L. (2014). Quantitative local and global a priori estimates for fractional nonlinear diffusion equations. *Adv. Math.* 250, 242–284.
- [2] Dahlberg, B. E. J., and Kenig, C. E. (1988). Nonnegative solutions to fast diffusions. *Rev. Mat. Iberoamericana* 4, 1, 11–29.
- [3] Grillo, G., Muratori, M., and Punzo, F. (2015). Fractional porous media equations: existence and uniqueness of weak solutions with measure data. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 54, 3, 3303–3335.
- [4] Herrero, M. A., and Pierre, M. (1985). The Cauchy problem for $u_t = \Delta u^m$ when $0 < m < 1$. *Trans. Amer. Math. Soc.* 291, 1, 145–158.
- [5] Vázquez, J. L. (2014). Barenblatt solutions and asymptotic behaviour for a nonlinear fractional heat equation of porous medium type. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 16, 4, 769–803.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por PID2023-146931NB-I00, CEX2023-001347-S and RED2022-134784-T, todas financiadas por MICIU/AEI/10.13039/501100011033.

An optimum version of the trace embedding for functions of bounded variation

José C. Sabina de Lis

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna

josabina@ull.edu.es

This work addresses an optimum version of the trace inequality expressing the embedding $BV(\Omega) \subset L^1(\partial\Omega)$, the first space standing for the functions of bounded variation in a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. The emphasis is going to be placed on the regularity that the domain Ω should exhibit for this result to be valid. The consequences on the lower semicontinuity of the functional $J(u) = \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} F(x, u)$ will be also discussed.

Keywords: Trace inequality, functions of bounded variation, sets of finite perimeter.

References

- [1] G. Anzellotti and M. Giaquinta (1978). BV functions and traces. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 60:1–21.
- [2] E. Giusti (1981). The equilibrium configuration of liquid drops. *J. Reine Angew. Math.*, 321:53–63.
- [3] L. Modica (1987). Gradient theory of phase transitions with boundary contact energy. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 4(5):487–512.
- [4] J. C. Sabina de Lis (2025). Trace inequality for $BV(\Omega)$ in smooth domains. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 119, no. 4, Paper No. 114.

Acknowledgments. This research has been partially supported by Grant PID2022-136589NB-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

Efficient computation of a parity-check matrix for $\mathbb{Z}_{p^s}$ -additive codes and $\mathbb{Z}_p\mathbb{Z}_{p^2}\mathbb{Z}_{p^3}$ -additive codes

Adrián Torres-Martín, Cristina Fernández-Córdoba, Carlos Vela, Mercè Villanueva

Departament d'Enginyeria de la Informació i de les Comunicacions,
Universitat Autònoma de Barcelona

adrian.torres@uab.cat

A linear code over the ring $\mathbb{Z}_{p^s}$ of length n is a submodule of $\mathbb{Z}_{p^s}^n$, where p is a prime and $s \geq 1$. These codes are also called $\mathbb{Z}_{p^s}$ -additive codes and can be seen as a generalization of linear codes over $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4$, or, more generally, over $\mathbb{Z}_{2^s}$, which have been extensively studied (see, e.g., [3, 4, 5]). We present an efficient method for computing a parity-check matrix of a $\mathbb{Z}_{p^s}$ -additive code from a generator matrix in standard form. This generalizes a result given for linear codes over $\mathbb{Z}_4$ in [5]. We also compare the performance of our results, implemented in Magma, with the currently available function in Magma for codes over finite rings in general. Finally, we outline some ideas to generalize these results to $\mathbb{Z}_p\mathbb{Z}_{p^2}\mathbb{Z}_{p^3}$ -additive codes, which are submodules of $\mathbb{Z}_p^{\alpha_1} \times \mathbb{Z}_{p^2}^{\alpha_2} \times \mathbb{Z}_{p^3}^{\alpha_3}$, for some non-negative integers $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, following some of the ideas presented in [1, 2] for $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ -additive codes.

Keywords: $\mathbb{Z}_{p^s}$ -additive codes, $\mathbb{Z}_p\mathbb{Z}_{p^2}\mathbb{Z}_{p^3}$ -additive codes, parity-check matrix.

References

- [1] J. Borges, C. Fernández-Córdoba, J. Pujol, J. Rifà, M. Villanueva (2010). $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ -linear codes: generator matrices and duality. *Designs, Codes and Cryptography*, 54(2), 167–179.
- [2] J. Borges, C. Fernández-Córdoba, J. Pujol, J. Rifà, M. Villanueva (2022). $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ -Linear Codes. Springer.
- [3] C. Fernández-Córdoba, C. Vela, M. Villanueva (2022). Nonlinearity and kernel of $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ -linear simplex and MacDonald codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 68(11), 7174–7183.
- [4] M. K. Gupta (2005). On linear codes over $\mathbb{Z}_{2^s}$. *Designs, Codes and Cryptography*, 36, 227–244.
- [5] A. R. Hammons Jr., P. V. Kumar, A. R. Calderbank, N. J. A. Sloane, P. Solé (1994). The $\mathbb{Z}_4$ -linearity of Kerdock, Preparata, Goethals, and related codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 40(2), 301–319.

Acknowledgments. This work has been partially supported by the Spanish MCIN under Grant PID2022-137924NB-I00 (AEI / 10.13039/501100011033 / FEDER, UE).

Grafos de isogenias de curvas elípticas: entrelazando caminos de grados distintos

Josep M. Miret, Jordi Pujolàs, Juan Tena, Javier Valera

Departament de Matemàtica, Universitat de Lleida

josepmaria.miret@udl.cat

Recientemente, Luca de Feo et al. [2, 3] han presentado a la convocatoria del NIST una propuesta de firma digital llamada SQIsign, basada en isogenias de curvas elípticas supersingulares. Su seguridad se basa en la dificultad computacional de encontrar un camino entre dos curvas del grafo supersingular [6].

En esta charla, damos un algoritmo para obtener los j -invariantes de las curvas del grafo cuyo anillo de endomorfismos tiene un endomorfismo *twisting* [4]. Como consecuencia, mostramos algunas propiedades de la estructura de estos grafos de curvas supersingulares [1] al considerar los entrelazamientos que se obtienen con isogenias de grados coprimos, comparándolos con el caso ordinario [5].

Palabras clave: Cuerpos finitos; Curvas elípticas supersingulares; Grafos de isogenias; Criptografía post-cuántica.

Referencias

- [1] S. Arpin, C. Camacho-Navarro, K. Lauter, J. Lim, K. Nelson, T. Scholl, J. Sotáková (2023). Adventures in supersingularland. *Experimental Mathematics*, 32(2), 241–268.
- [2] L. De Feo, D. Kohel, A. Leroux, C. Petit, B. Wesolowski (2020). SQISign: compact post-quantum signatures from quaternions and isogenies. ASIACRYPT 2020, Lect. Notes Comput. Sci., vol. 12491, 64–93.
- [3] L. De Feo, A. Leroux, P. Longa, B. Wesolowski (2022). New algorithms for the Deuring correspondence: Towards practical and secure SQISign signatures. Cryptology ePrint Archive, Paper 2022/234.
- [4] W. Castryck, L. Panny, F. Vercauteren (2020). Rational isogenies from irrational endomorphisms. EUROCRYPT 2020, Lect. Notes Comput. Sci., vol. 12106, Springer-Verlag, 523–548.
- [5] M. Fouquet, J. Miret, J. Valera (2018). Distorting the volcano. *Finite Fields Appl.*, 49, 108–125.
- [6] S. Galbraith, C. Petit, J. Silva (2017). Identification Protocols and Signature Schemes Based on Supersingular Isogeny Problems. ASIACRYPT 2017, Part I, Lect. Notes Comput. Sci., vol. 10624, Springer-Verlag, 3–33.

Agradecimientos. Trabajo financiado parcialmente por el Ministerio de Ciencia e Innovación mediante el proyecto PID2021-124613OB-I00, por la Generalitat de Catalunya mediante el grupo 2021SGR 00434 y por la red Iberoamerica 522RT0131 de CyTeD.

Accurate computations with collocation matrices of Bernstein-type polynomial bases

Héctor Orera, Jorge Delgado, Juan Manuel Peña

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

hectororera@unizar.es

Many interesting generalizations of the Bernstein polynomials have been proposed in the literature to build different Bernstein-type operators that improve the order of the approximation of the classical one. In this talk, we consider some bases for the first order approximation introduced in [2] and characterize the cases where they are totally positive. For these cases, we study their collocation matrices on increasingly ordered nodes and show that it is possible to achieve accurate computations with them for the computation of the eigenvalues, singular values, the inverse and the solution of some linear systems of equations. The high relative accuracy of this proposal is achieved by the use of a bidiagonal decomposition [1] and the functions designed and implemented by Plamen Koev [3].

Keywords: Total positivity; High relative accuracy; Bernstein polynomials; Bidiagonal decomposition.

References

- [1] M. Gasca, J. M. Peña (1996). On factorizations of totally positive matrices. *Total positivity and its applications*. Springer.
- [2] H. Khosravian-Arab, M. Dehghan, M. R. Eslahchi (2018). A new approach to improve the order of approximation of the Bernstein operators: theory and applications. *Numer. Algorithms*, 77, 111–150.
- [3] P. Koev. Accurate computations with totally nonnegative matrices. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 29, 731–751.

Probabilidad de Ruina con Reset Geométrico: Un Enfoque Analítico en Dominios Finitos

Juan A. Vega Coso, Francisco Javier Villarroel Rodríguez

Instituto Universitario de Física Fundamental y Matemáticas, Universidad de Salamanca

jantovc@usal.es

En esta ponencia se estudia el problema de la ruina en un recorrido aleatorio sobre el dominio finito $\{0, 1, \dots, a\}$ con estados absorbentes en 0 (ruina) y a (éxito), y mecanismo de reinicio geométrico. Se analiza rigurosamente la probabilidad de ruina eventual $q_z(\gamma)$ en función del estado inicial z y del parámetro de reset γ , no sólo en el caso simétrico ($p = q = 1/2$).

La solución se obtiene mediante un enfoque espectral basado en las fórmulas de Feller, que permiten descomponer las probabilidades de absorción $u_{z,k}$ y $v_{z,k}$ en modos sinusoidales asociados a los autovalores $\lambda_\nu = \cos(\pi\nu/a)$. Combinando este desarrollo con la teoría de funciones generadoras, se deriva una fórmula cerrada exacta para $q_z(\gamma)$ como cociente de sumas espectrales evaluadas en $s = 1 - \gamma$. Esta expresión unificada recupera correctamente los casos límite sin reset ($\gamma \rightarrow 0$) y reset inmediato ($\gamma \rightarrow 1$), y revela cómo el reset modula la competición entre los modos de ruina y éxito.

Los resultados muestran que incluso tasas bajas de reinicio alteran significativamente la probabilidad de ruina, actuando como un control eficaz sobre el destino del proceso. Este modelo combina herramientas clásicas de probabilidad con técnicas espectrales modernas, ofreciendo una perspectiva profunda sobre sistemas estocásticos con memoria intermitente. El enfoque presentado es numéricamente estable, fácil de implementar y generalizable a otros modelos con estructura discreta.

Palabras clave: Probabilidad de ruina, caminata aleatoria, reset geométrico, análisis espectral, funciones generadoras.

Referencias

- [1] W. Feller (1968) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (Vol.I, 3rd ed) Wiley
- [2] S. Redner (2001) *A Guide to First-Passage Processes*. Cambridge University Press.
- [3] M.R. Evans, S.N. Majumdar (2011). Diffusion with stochastic resetting in bounded domains. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(43), 435001.
- [4] M. J. Kearney, S.N. Majumdar (2007). On the area under a continuous time Brownian motion till its first-passage time. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(27), 8457.
- [5] M. Montero, J. Villarroel (2013). Directed random walk with random resetting. *Physical Review E*, 87(1), 012116.

5

Pósteres



Diagnosis from dimensionality reduction based on density estimation

David G. Aragonés, D. Cerezo-Wallis, A. Rubio-Ponce, I. Ballesteros, A. Hidalgo, G.F. Calvo

Instituto de Matemática Aplicada a la Ciencia y la Ingeniería, Universidad de Castilla-La Mancha

david.aragones@uclm.es

Understanding the organization of immune cell states from high-dimensional transcriptomic data requires the development of rigorous mathematical frameworks. In this work, we introduce a quantitative methodology to characterize and compare neutrophil states using probability density estimation and information-theoretic overlap measures. Our approach begins with a representation $\{x_j, y_j\}$ of single-cell transcriptional data from murine neutrophils across diverse tissues and conditions, obtained using dimensionality reduction. To extract continuous density fields over the transcriptomic landscape, we employ kernel density estimation (KDE) with the Epanechnikov kernel. This procedure ensures accurate estimation even for multimodal or non-Gaussian distributions observed in neutrophil states. To quantify similarity between distributions associated with different physiological or pathological conditions, we compute the Bhattacharyya coefficient, which yields a normalized score in $[0, 1]$ measuring the degree of overlap between two probability density functions. Numerical evaluation of this integral is performed via adaptive Monte Carlo methods combining importance and stratified sampling, which reduce estimator variance by concentrating samples around density peaks. This mathematical framework allows us to represent cellular state similarity as a collection of overlap barcodes, providing a diagnostic tool for inferring host conditions from blood neutrophil distributions. Beyond its biological applications, our study highlights the utility of combining nonparametric density estimation, information-theoretic similarity measures, and advanced Monte Carlo integration in analyzing high-dimensional single-cell data.

Keywords: Kernel density estimation; Bhattacharyya coefficient; Monte Carlo integration; Machine learning; Data analysis.

Configuraciones de rectas en Superficies Cúbicas

Juan Carlos Castro Rivera, José Ignacio Cogolludo Agustín

Departamento Matemáticas, Universidad de Zaragoza

j.castro@unizar.es

Sea $S \subset \mathbb{CP}^3$ una superficie cúbica lisa, y $L = \cup_{i=1}^{27} l_i$ sus rectas. Exploramos qué información geométrica sobre la configuración de las rectas contiene el grupo fundamental del complementario,

$$\pi_1(S \setminus L).$$

Concretamente, queremos ver si es sensible al número de *puntos de Eckardt* (puntos triples). Para ello estudiamos un invariante suyo: las *Variedades Características*. Exploramos distintas técnicas para obtener información de estas variedades.

Palabras clave: Superficies cúbicas; Configuraciones de rectas; Grupo Fundamental; Variedades Características.

Referencias

- [1] Chanh Tu, NGuyen (2009). Configuration spaces of non-singular cubic surfaces with Eckardt points. *Kyushu J. Math.* 63, 83–101.
- [2] Cogolludo Agustín, J.I. (2002). Topological invariants of the complement to arrangements of rational plane curves. *Mem. Amer. Math. Soc.* 756, MR1921584 (2003k:32037).

Agradecimientos. Trabajo en colaboración con José Ignacio Cogolludo Agustín.

Número de $\{2\}$ -dominación en grafos

Andrea Conchado Peiró, Abel Cabrera-Martínez

Programa de Doctorado en Ingeniería Matemática, Universidad Carlos III de Madrid y
Centro de Gestión de la Calidad y del Cambio, Universitat Politècnica de València

100554864@alumnos.uc3m.es

La teoría de dominación es una de las áreas de investigación más activas dentro de la teoría de grafos. En particular, el estudio de funciones dominantes ha adquirido en los últimos años una importancia creciente, tanto por su interés teórico como por sus posibles aplicaciones. Este trabajo se centra en el estudio de un caso específico de función dominante en grafos, abordado desde una perspectiva estrictamente teórica. Sea G un grafo sin vértices aislados con conjunto de vértices $V(G)$. Una función $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ se llama función $\{2\}$ -dominante de G si $\sum_{u \in N_G[v]} f(u) \geq 2$ para todo vértice $v \in V(G)$, donde $N_G[v]$ representa la vecindad cerrada de $v \in V(G)$. El número de $\{2\}$ -dominación de G , denotado por $\gamma_{\{2\}}(G)$, es el peso mínimo $\omega(f) = \sum_{u \in V(G)} f(u)$ entre todas las funciones $\{2\}$ -dominantes f de G . Este parámetro ha sido objeto de estudio en diversos artículos (véanse [1, 3, 4]). Los resultados que se presentan en este trabajo fueron publicados en [2]. En ellos se establecen nuevas cotas ajustadas para el número de $\{2\}$ -dominación de un grafo, así como varias relaciones entre dicho parámetro y otros parámetros clásicos de dominación. En particular, se demuestra que todo árbol T satisface que $\gamma_{\{2\}}(T) = 2\gamma(T)$, donde $\gamma(T)$ representa el número de dominación de T . Asimismo, se obtienen fórmulas cerradas para el número de $\{2\}$ -dominación de varias familias y productos de grafos, destacando el caso del producto lexicográfico.

Palabras clave: $\{2\}$ -dominación, dominación, producto lexicográfico, árboles.

Referencias

- [1] B. Brešar, M. A. Henning, S. Klavžar (2006). On integer domination in graphs and Vizing-like problems, *Taiwanese J. Math.*, 10, 1317–1328.
- [2] A. Cabrera-Martínez, A. Conchado (2022) On the $\{2\}$ -domination number of graphs. *AIMS Math.*, 7(6), 10731–10743.
- [3] X. Hou, Y. Lu (2009). On the $\{k\}$ -domination number of cartesian products of graphs. *Discrete Math.*, 309, 3413–3419.
- [4] C. M. Lee, M. S. Chang (2008). Variations of Y -dominating functions on graphs. *Discrete Math.*, 308, 4185–4204.

Género de Turaev e índice de arco: una nueva conjetura para enlaces

Álvaro del Valle Vílchez

Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla

adelvalle3@us.es

El género de Turaev g_T es un invariante numérico de nudos y enlaces que mide qué tan lejos se encuentra un enlace de ser alternante (es decir, de admitir un diagrama alternante). Determinar si un enlace es alternante no resulta, en general, sencillo. En este trabajo comparamos el género de Turaev con otro invariante numérico, el índice de arco α . En particular, conjeturamos que $c(L) + 2 - \alpha(L) \geq 2g_T(L)$ para cualquier enlace L primo y no separado, donde $c(L)$ es el número de cruces de L . Presentamos diversas técnicas para verificar la conjetura en familias relevantes de enlaces: enlaces adecuados, clausuras de 3-trenzas positivas, enlaces tóricos y nudos de Kanenobu. Este es un trabajo conjunto con Adam M. Lowrance.

Palabras clave: Nudos y Enlaces; Género de Turaev; Índice de Arco.

Referencias

- [1] A. Del Valle Vílchez and A. M. Lowrance (2025). On the arc index and Turaev genus of a link. *Preprint*, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2509.21274>.

A probabilistic formalization of Association Rule Mining

Jose Antonio Ferez-Rubio, Carlos Perez-Vidal, Jose Vicente Segura-Heras

Departamento de Estadística, Matemáticas e Informática,
Universidad Miguel Hernández de Elche

j.ferez@umh.es

Data Mining has become an essential field in today's digital era, enabling organizations to extract actionable insights from ever-growing volumes of data. By uncovering patterns, trends, and hidden relationships within complex datasets, it supports informed decision-making and process optimization across domains ranging from business intelligence to biomedicine. Within this field, Association Rule Mining (ARM) stands out as a widely adopted technique for discovering meaningful relationships between variables in large datasets. This technique emerged in the early 1990s, when supermarkets began to have massive amounts of data on what products customers bought in each shopping basket. This huge amount of data was stored in what was called transaction databases. In 1993, Rakesh Agrawal, Tomasz Imieliński y Arun Swami published a paper where formally introduced the concept and problem of mining association rules in transactional data, laying the foundations of Association Rule Mining.[1] It should be noted that this paper was largely inspired by the previous contributions of Petr Hájek et al.[2] in 1960s, and Piatetsky-Shapiro [3] in 1991. Interestingly, none of these seminal papers formalizes a probabilistic approach to the theoretical foundations of ARM. However most of the books and scientific articles related to ARM employ inappropriate probabilistic approaches to define and evaluate core theoretical concepts and measures, such as support, confidence, or lift. These approaches are often applied inconsistently, lacking both methodological rigor and standardized definitions. This situation underscores the need to establish, with the aid of probability theory, a formal probabilistic theoretical framework based on the formalization of the foundations of ARM as presented in the seminal papers. This novel framework will allow, among other things, an improvement in the interpretability and comparability between the results of different studies, and will facilitates integration with other methodologies, such as statistical and machine learning techniques.

Keywords: Association Rule Mining; probability; formalization; ARM; Data Mining.

References

- [1] R. Agrawal, T. Imieliński, A. Swami (1993). Mining Association Rules between Sets of Items in Large Databases, en P. Buneman et al., editors, *Proceedings of the 1993 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data*, ACM Press, Washington, DC, USA, 207–216.
- [2] P. Hájek, I. Havel, M. Chytil (1966). The GUHA method of automatic hypotheses determination. *Computing*, 1(4), 293–308.
- [3] G. Piatetsky-Shapiro (1991). Discovery, analysis, and presentation of strong rules. In G. Piatetsky-Shapiro, W. J. Frawley (Eds.), *Knowledge Discovery in Databases*, AAAI/MIT Press, Cambridge, MA, USA, 229–248.

Acknowledgments. Project CPP2021-008593, grant MICIU/AEI/10.13039/501100011033 of the Spanish Government and the European Union-NextGenerationEU/PRTR.

Unique preduals of Banach spaces: Property (X) of the predual of $H^\infty(\mathbb{D})$

Mario Guillén, Pedro Tradacete

Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

mguisan3@upv.edu.es

This work introduces the concept of uniqueness of predual, shows examples from the literature and proves that property (X) is a sufficient condition for being a unique predual. Lastly, we review the fact that the predual of $H^\infty(\mathbb{D})$ has property (X), providing proofs not found in the literature.

Keywords: Unique preduals; Banach spaces; Property (X); Space of bounded holomorphic functions.

References

- [1] E. Amar and A. Lederer (1971). Points exposés de la boule unité de $H^\infty(\mathbb{D})$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série A*, vol. 272, pp. 1449-1552.
- [2] , T. Ando (1978). On the predual of H^∞ . *Commentationes Mathematicae: Tomus Specialis in Honorem Ladislai Orlicz*, vol. 1, pp. 33-40.
- [3] G. Godefroy (1980). Nouvelles classes d'espaces de Banach à prédual unique. *Séminaire Analyse fonctionnelle (dit "Maurey-Schwartz")*, 1980, pp. 1-28
- [4] G. Godefroy. Existence and uniqueness of isometric preduals: A survey. *Banach space theory* (Proc., Iowa City, 1987). Ed. by Bor-Luh Lin. Vol. 85. 1989, pp. 131-193.
- [5] H. Pfitzner (2007). Separable L-embedded Banach spaces are unique preduals. *Bulletin of the London Mathematical Society* 39.
- [6] M. Guillén (2025). Unique preduals and free objects in Banach spaces (Master thesis). <https://riunet.upv.es/handle/10251/225022>

Acknowledgments. This project has been developed under the JAE Intro Scholarship from the Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC), supervised by Pedro Tradacete.

Pointwise convergence of the Klein-Gordon flow

Pablo Merino, Renato Lucà

Basque Center for Applied Mathematics, Euskal Herriko Unibertsitatea

pmerino@bcamath.org

In this poster/talk, we will deal with a nonlinear pointwise convergence theory for the case of the 3d cubic Klein-Gordon equation. In particular, we address the following question, considering the initial datum in $H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)$: which is the minimal regularity s such that the solution of the aforementioned equation converges, as time goes to 0 and almost everywhere in space, to the initial datum? Departing from the well-known result for the linear setting (that is, such pointwise convergence holds true if and only if $s > 1/2$), we answer to the question in two different ways that lead us to two different minimal regularities:

- In a deterministic sense, we prove that the nonlinear counterpart of the aforementioned result for the linear flow holds true if and only if $s > 1/2$.
- In a probabilistic sense, we lower the regularity assumption to $s > 0$ through a suitable randomization of the initial data

Keywords: Klein-Gordon equation; maximal estimates; smoothing estimates; random data.

References

- [1] N. Burq and N. Tzvetkov. Random data Cauchy theory for supercritical wave equations. I. Local theory. *Invent. Math.*, 173(3):449–475, 2008.
- [2] E. Compagnon, R. Lucà, G. Staffilani. Pointwise Convergence of the Schrödinger Flow. *Int. Math. Res. Not.*, 1, 596–647, 2021.
- [3] M. G. Cowling. Pointwise behavior of solutions to Schrödinger equations. In *Harmonic analysis (Cortona, 1982)*, volume 992 of *Lecture Notes in Math.*, pages 83–90. Springer, Berlin, 1983.
- [4] R. Lucà and P. Merino. Pointwise convergence of the Klein-Gordon flow. *arXiv preprint arXiv:2402.10105*, 2024.

Acknowledgments. PM is supported by the Basque Government through the program BERC 2022-2025 (BCAM) and by the Severo Ochoa accreditation CEX2021-001142-S (BCAM). RL was also supported by the Ramon y Cajal fellowship RYC2021-031981-I. PM is also supported by the predoctoral program of the Education Department of the Basque Government.

Sobre la clasificación de estructuras complejas abelianas en álgebras de Lie nilpotentes

Luis Pizarro Golvano, Raquel Villacampa Gutiérrez

Departamento de Matemáticas-IUMA, Universidad de Zaragoza

lpizarro@unizar.es, raquelvg@unizar.es

Presentamos un nuevo enfoque para la clasificación de estructuras complejas abelianas en álgebras de Lie nilpotentes, basado en el trabajo de R. A. Horn y V. V. Sergeichuk [3, 4]. Como aplicación, recuperamos el caso particular de álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6, abordado primeramente por [1] y completado por [2]. Este trabajo se enmarca en la tesis doctoral del primer autor, dirigida por la segunda autora.

Palabras clave: Estructuras complejas, álgebras de Lie nilpotentes, *congruencia.

Referencias

- [1] A. Andrada, M.L. Barberis, I.G. Dotti (2011). Classification of abelian complex structures on 6- dimensional Lie algebras,. *J. Lond. Math. Soc*, 83, 232–255; Corrigendum: *J. Lond. Math. Soc.* 87 (2013), 319–320.
- [2] M. Ceballos, A. Otal, L. Ugarte, R. Villacampa (2016). Invariant complex structures on 6-nilmanifolds: classification, Frölicher spectral sequence and special Hermitian metrics. *J. Geom. Anal*, 26, 252–286.
- [3] R. A. Horn, V. V. Sergeichuk (2006). Canonical forms for complex matrix congruence and *congruence. *Linear Algebra Appl.*, 416, 1010–1032.
- [4] R. A. Horn, V. V. Sergeichuk (2006). A regularization algorithm for matrices of bilinear and sesquilinear forms. *Linear Algebra Appl.*, 412, 380-395.

Agradecimientos. Ambos autores están parcialmente financiados por el proyecyto PID2023-148446NB-I00, (MICIU/AEI/10.13039/501100011033) y por el grupo E22_20R: “Álgebra y Geometría” del Departamento de Ciencia, Universidad y Sociedad del Conocimiento del Gobierno de Aragón.

Sobolev orthogonal polynomials involving an exponential weight

Cristina Rodríguez Perales, Juan F. Mañas Mañas, Juan J. Moreno Balcázar

Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería

crp170@ual.es

In this work, we consider the orthogonal polynomials $\{q_n\}_{n \geq 0}$ with respect to a Sobolev inner product involving the Freud weight $\exp(-x^4)$, given by [1]

$$(p, q)_S = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x) \exp(-x^4) dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} p'(x)q'(x) \exp(-x^4) dx, \quad \lambda > 0.$$

Our first objective is to study the local asymptotics known as Mehler–Heine asymptotics for this family of polynomials. Moreover, this result together with the well-known Hurwitz’s Theorem allows us to establish the asymptotic behavior of the zeros of these polynomials. Motivated by this consequence, we also address the problem of computing the zeros of the polynomials $\{q_n\}_{n \geq 0}$. With that purpose, we construct a generalized eigenvalue problem from the five-term recurrence relation satisfied by these polynomials, so that the computation of the zeros is equivalent to computing the generalized eigenvalues. We also present numerical experiments illustrating the computation of the zeros for different values of λ . Finally, we deduce the fourth-order differential equation satisfied by these polynomials.

Keywords: Sobolev orthogonal polynomials; Mehler–Heine asymptotics; Zeros; Computation.

References

- [1] A. Cachafeiro, F. Marcellán, J.J. Moreno–Balcázar (2003). On asymptotic properties of Freud–Sobolev orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* 125, 26–41.
- [2] J.F. Mañas-Mañas, J.J. Moreno-Balcázar, C. Rodríguez-Perales. Nevai–Sobolev orthogonal polynomials. *Submitted*.
- [3] P. Nevai (1983). Orthogonal polynomials associated with $\exp(-x^4)$, *Proc. Canad. Math. Soc.* 3, 263–285.

Acknowledgments. Work financed by the PPIT-UAL grant, Junta de Andalucía–ESF. Programme: 54.A. Application 741; by the project PID2021–124472NB–I00 funded by MICIU/AEI/10.13039/501100011033 and ‘ERDF A way of making Europe’; CDTIME Research Center and Research Group FQM–0229 of the University of Almería.

Equisingularity of inner Khovanskii non-degenerate deformations

Eder L. Sanchez Quiceno^{1,2}, Julian Espinel Leal

¹Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos

² Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada, Universitat Politècnica de València

edersanchez@ufscar.br

We present results from [2] concerning the topological equisingularity of singularities arising from real polynomial maps $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, with $f(0) = 0$, under one-parameter deformation $F(\mathbf{x}, \varepsilon) = f(\mathbf{x}) + \theta(\mathbf{x}, \varepsilon)$, $F(0, \varepsilon) = 0$. The work begins by introducing the notion of *inner Khovanskii non-degeneracy (IKND)*, a condition that generalizes a previous non-degeneracy criterion for complex polynomial functions [5]. We prove that the IKND condition ensures the link of the singularity of f at the origin, $L_f := f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_r^{n-1}$, is smooth and well-defined for all small enough radii $r > 0$. Focusing on one-parameter deformations $F(\mathbf{x}, \varepsilon)$, we establish two sets of sufficient conditions: one to guarantee that the topological type of $F_\varepsilon := F(\cdot, \varepsilon)$ remains constant along the deformation (*topological triviality*), and a second set of conditions to ensure the constancy of the isotopy-type of L_{F_ε} (*link-constancy*). Finally, inspired by earlier works [1, 3, 4], we extend these definitions and results to the domain of mixed polynomial maps $f = (f^1, \dots, f^p) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$, with $f(0) = 0$, which are complex valued maps such that each f^j is a complex polynomial in the variables $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ and their conjugates $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$.

Keywords: Deformations; Inner non-degeneracies; Link-constancy; Topological triviality; Real maps.

References

- [1] Araújo dos Santos, R. N., Bode, B., & Sanchez Quiceno, E. L. (2024). Links of singularities of inner non-degenerate mixed functions. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 55(3), Paper No. 34.
- [2] Espinel Leal, J. D. & Sanchez Quiceno, E. L. (2025). Topological triviality and link-constancy in deformations of inner Khovanskii non-degenerate maps. Preprint *arXiv:2504.18816*.
- [3] Khovanskii, A. G. (1977). Newton polyhedra, and toroidal varieties. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 11(4), 56–64.
- [4] Oka, M. (2010). Non-degenerate mixed functions. *Kodai Math. J.*, 33, 1–62.
- [5] Wall, C. T. C. (1999). Newton polytopes and non-degeneracy. *J. Reine Angew. Math.*, 509, 1–19.

Acknowledgments. Joint work with Julian Espinel Leal. The project was partially supported by the CAPES Grant-PROEX-11162221 and by São Paulo Research Foundation (FAPESP), Brasil, Process Number 2023/11366-8 and 2024/17116-6.

Expressivity of Graph Neural Networks: ReLU vs. Sigmoid GNNs

Josué Tonelli-Cueto, Sammy Khalife

Department of Applied Mathematics and Statistics, Johns Hopkins University

josue.tonelli.cueto@bizkaia.eu

Graph Neural Networks (GNNs) form a powerful computational framework for machine learning on graphs with many applications. However, many open questions exist regarding how the chosen activation function affects expressivity, trainability and generability. In this short communication, we show that ReLU GNNs are more expressive than Sigmoid GNNs. However, we also show that Sigmoid GNNs are expressive enough so that this gap is not significant in practice, meaning that the comparison between ReLU and Sigmoid GNNs should be done in terms of trainability and generability.

This work is accepted and presented at ICLR'25 [1].

Keywords: machine learning; GNN; GC2 query; expressivity; sigmoid.

References

- [1] S. Khalife and J. Tonelli-Cueto (2025). Is uniform expressivity too restrictive? Towards efficient expressivity of GNNs. *The Thirteenth International Conference on Learning Representations (ICLR 2025)*. <https://openreview.net/forum?id=lsvGqR60Tf>.

Acknowledgments. Sammy Khalife gratefully acknowledges support from Air Force Office of Scientific Research (AFOSR) grant FA95502010341, and from the Office of Naval Research (ONR) grant N00014-24-1-2645. Josué Tonelli-Cueto is thankful for the generous support of the Acheson J. Duncan Fund for the Advancement of Research in Statistics, grant 25-28. Josué Tonelli-Cueto thanks Jazz G. Suchen for useful discussions during the write-up of this paper, particularly regarding Proposition C.3 in [1], and Brittany Shannahan and Lewie-Napoleon III for emotional support.

Conformal symmetries in non-relativistic theories of gravity

Jose Torrente Teruel, Daniel de la Fuente, Rafael M. Rubio

Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba

jtorrente@uco.es

A partir de la existencia de simetrías infinitesimales en modelos cosmológicos no relativistas, se obtienen resultados de splitting (locales y globales) en espaciotiempos galileanos [2]. De manera natural, el estudio se extiende a la clase de simetrías conformemente leibnizianas [1]. En esta comunicación, estudiamos las relaciones que existen entre las clases de simetrías conformemente leibnizianas, simetrías torse-forming, concirculares, etc. Además, se obtienen aplicaciones recubridoras bajo condiciones geométricas simples. Por último, probamos resultados novedosos respecto a la unicidad de splitting. Estos permiten establecer diferencias considerables entre las estructuras geométricas relativistas y no relativistas.

Keywords: Conformally Leibnizian vector field; Galilean covering map; uniqueness of splitting; uniform global generator.

References

- [1] D. de la Fuente, R. M. Rubio, and J. Torrente-Teruel (2025). Geometric structure of Galilean spacetimes admitting a conformally Leibnizian vector field. *Phys. Scr.* 100(9), p. 095001.
- [2] D. de la Fuente, R. M. Rubio, and J. Torrente-Teruel (2025). On Twisted Spacetimes: a new class of Galilean cosmological models. *Adv. Nonlinear Stud.* (2025).

Las matemáticas de Jorge Juan

José Miguel Belda Cortés

Universidad de Alicante
Master de Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato

jmbc11@alu.ua.es

Este trabajo pretende ser una introducción a la obra del eminente marino, ingeniero naval y científico Jorge Juan, que presente sus documentos históricos, navales y aportes matemáticos de la manera más accesible y estructurada posible. Entre ellos las matemáticas y física de '*Examen Marítimo Teórico Práctico*': rotación, péndulos y palancas hasta la fricción en cuñas, tornillos y tornos, haciéndose valer de ideas recientes en cálculo diferencial e integral; '*Compendio de Navegación*': el uso de cartas náuticas, la resolución de problemas de navegación mediante el cálculo, y métodos para obtener correcciones que se deben hacer en la navegación; '*Observaciones Astronómicas*': presenta información sobre la eclíptica y los satélites de Júpiter, junto con la culminación de su trabajo al determinar la forma de la Tierra y las correspondientes correcciones a la navegación que esto implica.

Junto a lo anterior, se presentarán otros documentos que forman parte de la colección de archivos de bibliotecas, Fuerzas Armadas, y fundaciones; conformarán el registro gráfico de su obra presentado en las jornadas de la RSME 2026. De esta forma se espera que en la visita a la casa natalicia de Jorge Juan en Novelda se disfrute más y sea más provechosa.

Palabras clave: Jorge Juan; meridiano; historia de las matemáticas.

Referencias

- [1] Jorge Juan y Santacilia (1771). *Examen Marítimo Teórico Práctico o Tratado de Mecánica aplicado a la construcción, conocimiento y manejo de los navíos y demás embarcaciones. Madrid, en la Imprenta Real, 1793.*
- [2] Jorge Juan y Santacilia (1757). *Compendio de Navegación para el uso de los Cavalleros Guardias-Marinas. Madrid, en la Imprenta Real, 1793.*
- [3] Jorge Juan y Santacilia (1773). *Observaciones astronómicas y físicas hechas de orden de Su Majestad en los Reynos del Peru. Madrid, en la Imprenta Real de la Gazeta (2ª Ed.).*
- [4] Diego García Castaño (2012). *Transcendencia científica de Jorge Juan Santacilia. Editorial Club Universitario.*
- [5] Victor San Juan (2021). *La Armada desconocida de Jorge Juan. Ediciones Nowtilus.*

Agradecimientos. A todos los investigadores que se han dedicado a conservar y difundir la historia matemática, en especial a Diego García Castaño.

Representar el concepto de diagonal de un polígono: diferencias entre dibujar y usar material manipulativo

Àngela Buforn, Melania Bernabeu, Alberto Zapatera, Javier Monje, Antonio Saorín

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante

angela.buforn@ua.es

En las primeras etapas educativas se suele usar el método COPISI que consiste en una progresión de lo concreto a lo abstracto (concreto – pictórico – abstracto o simbólico). En geometría, el uso de materiales manipulativos (concreto) ayuda a interiorizar y consolidar los conceptos geométricos [1]. A través de la manipulación se dota de sentido matemático a dicho recurso, estableciendo una relación entre el material y el concepto geométrico. Por ejemplo, para construir una diagonal en un polígono representado en un geoplano, se debe construir, con una goma, un segmento desde un pivote (vértice del polígono) a otro pivote del polígono, que no sea consecutivo, vinculando así lo concreto con la definición de diagonal. Además, en edades tempranas la psicomotricidad fina no está muy desarrollada, y el uso de material puede ayudar a representar estos conceptos mejor que usando lápiz y papel. En este estudio se muestran evidencias de la representación del concepto de diagonal de un polígono a través del dibujo con rotulador (pictórico) y del uso de una goma en un geoplano (concreto). Los participantes fueron una clase de 1º de Educación Primaria que recibieron una formación sobre el concepto de polígono, polígonos atendiendo al número de lados, ejes de simetría y diagonales. Los resultados muestran que el uso de lo concreto (material manipulativo – geoplano) evidencia mejor el significado del concepto de diagonal, pues les obliga a que los segmentos sean rectos, mientras que, a través del dibujo, aunque se use regla, estos segmentos no suelen ser rectos y, en ocasiones, no inician o acaban exactamente en los vértices del polígono. Como conclusión, se destaca el uso de material manipulativo frente al uso de lápiz y papel, el cual puede introducirse en etapas superiores donde la psicomotricidad fina esté más desarrollada.

Palabras clave: Aprendizaje de la geometría; Educación Primaria; Polígono; Diagonal; Material manipulativo.

Referencias

- [1] À. Bufor, M. Bernabeu (2023). Tareas para la formación del concepto de polígono en educación infantil. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 102, 47–51.
- [2] K.V. Cueva-Figueroa, S.A. Moscoso-Bernal (2025). Geoplanos como recurso didáctico para fortalecer el aprendizaje de geometría en estudiantes de 6 a 7 años. *Journal Scientific MQRInvestigar*, 9(1), e238.

Agradecimientos. Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo del proyecto CI-GE/2023/197 de la Conselleria de Educación, Cultura, Universidades y Empleo.

Deformations of OP ensembles and finite temperature Sine kernel

Thomas Chouteau, Caio Candido, Victor Alves, Charles Santos, Guilherme Silva

ICMC, Universidade de São Paulo

thomas.chouteau@usp.br

We study deformations of Orthogonal Polynomial Ensembles [2] in the regime of a large number of particles. The deformations we introduce affect the local fluctuations of the ensemble around a bulk point of the limiting spectrum. We identify the limiting kernel and express it in terms of the solution to an integrable non-local differential equation related to the Painlevé V equation. This new kernel arises as the correlation kernel of a conditionally thinned process built from the Sine point process, and it is also connected to a finite-temperature deformation of the Sine kernel recently studied by Claeys and Tarricone[1]. Finally, we investigate the effect of the deformation on the recurrence coefficients of the associated orthogonal polynomials, which exhibit oscillatory behavior even in a one-cut regular setting for the limiting spectrum.

Keywords: Determinantal Point Processes; Orthogonal polynomials; Asymptotics; Integrable equations.

References

- [1] T. Claeys, S. Tarricone, (2024). On the integrable structure of deformed sine kernel determinants. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 27(1), Paper No. 3,35.
- [2] P. Ghosal, G. Silva, (2022). Universality for multiplicative statistics of Hermitian random matrices and the integro-differential Painlevé II equation. *Comm. Math. Phys.*, 97(3):1237-1307.
- [3] N. N. Yanenko (1971) *The method of fractional steps. The solution of problems of mathematical physics in several variables*. Springer.
- [4] G. A. Staff, E. M. Rønquist (2005). Stability of the Parareal Algorithm, en T. J. Barth et al., editores, *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, Lect. Notes Comput. Sci. Eng., vol. 40, Springer-Verlag, 449–456.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por São Paulo Research Foundation (FAPESP), Brazil. Process Numbers #2023/10533 – 8 and #2025/06240 – 0.

Aplicación de un método reducido POD-greedy certificado basado en colocación Legendre a un problema de Rayleigh-Bénard

Jesús Cortés, Henar Herrero, Francisco Pla

Departamento de Matemáticas. Universidad de Castilla-La Mancha

`jesus.cortes@uclm.es`

Este trabajo presenta una metodología de orden reducido para calcular bifurcaciones en un problema de Rayleigh-Bénard usando colocación Legendre como discretización de alta fidelidad. Esta metodología combina un método de base reducida [1], especializado en la aproximación de ramas aisladas del diagrama de bifurcación, con otros procedimientos de orden reducido, diseñados para aproximar puntos de bifurcación. El método certificado produce, para cada rama, un modelo reducido basado en un problema de mínimos cuadrados de la restricción del residuo de alta fidelidad a una base reducida. Para certificar el método, las bases reducidas se construyen iterativamente usando un algoritmo POD-greedy dirigido por un estimador de error a posteriori riguroso, definido como el cociente de un residuo y un factor de estabilidad. Una contribución notable de este trabajo es el uso de otro procedimiento de base reducida para aproximar el factor de estabilidad. Los resultados numéricos muestran que el método propuesto permite la recuperación rápida y precisa del diagrama de bifurcaciones bajo estudio, sin asumir ningún conocimiento previo sobre el diagrama de bifurcación [2].

Palabras clave: métodos de orden reducido; estimación de error a posteriori; colocación Legendre; problemas de bifurcaciones; inestabilidad de Rayleigh-Bénard.

Referencias

- [1] A. Quarteroni, A. Manzoni, F. Negri (2016). *Reduced Basis Methods for Partial Differential Equations: An Introduction*. Springer.
- [2] J. Cortés, H. Herrero, F. Pla (2025). A Certified Reduced-Order Framework Based on Legendre Collocation for a Rayleigh-Bénard Problem. *J. Sci. Comput.* 105, 15.

Darboux's theorem in p -adic symplectic geometry

Luis Crespo, Álvaro Pelayo

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria

luis.cresporuiz@unican.es

Darboux's Theorem [2] is an important result in symplectic geometry, which states that symplectic manifolds have no local invariants other than the dimension. This is usually proved using Moser's Path Method [3].

We derive an analog of Moser's Path Method for p -adic analytic manifolds and use it to prove a p -adic analog of Darboux's Theorem. Hence, in the p -adic category there are also no local symplectic invariants other than the dimension: locally near any point, a $2n$ -dimensional p -adic analytic symplectic manifold is symplectomorphic to $((\mathbb{Q}_p)^{2n}, \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i)$.

Using the p -adic Darboux's Theorem as a stepping stone we derive two striking consequences: global Darboux's coordinates always exist for any second countable p -adic analytic symplectic manifold and that two second countable p -adic analytic symplectic manifolds with the same volume and which are both compact or both noncompact must be symplectomorphic. This is a symplectic version of a classical theorem of Serre in p -adic analytic geometry [4], which states that every compact p -adic analytic manifold is diffeomorphic to a union of at most $p - 1$ balls.

A full version of this abstract can be found in [1].

Keywords: Symplectic geometry; p -adic numbers; Darboux's Theorem; Serre's Theorem.

References

- [1] L. Crespo, Á. Pelayo (2025). Darboux's theorem in p -adic symplectic geometry. Preprint, arXiv:2508.15443.
- [2] G. Darboux (1882). Sur le problème de Pfaff. *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série* 6(1), 14–36.
- [3] J. Moser (1965). On the volume elements on a manifold. *Trans. Amer. Math. Soc.* 120(2), 286–294.
- [4] J. P. Serre (1965). Classification des variétés analytiques p -adiques compactes. *Topology* 3, 409–412.

Acknowledgments. The first author is funded by grant PID2022-137283NB-C21 of MCIN/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE. The second author is funded by a FBBVA (Bank Bilbao Vizcaya Argentaria Foundation) Grant for Scientific Research Projects with title *From Integrability to Randomness in Symplectic and Quantum Geometry*.

El estudio de la satisfacibilidad de ecuaciones diofánticas en un dominio finito mediante técnicas cuánticas

Miguel Hernández Cáceres

Departamento de matemáticas, Universidad de Oviedo

jmhernandez@uniovi.es

En este trabajo presentamos una metodología estructurada en tres algoritmos para determinar la resolubilidad de ecuaciones diofánticas en dominios finitos.

Nuestro enfoque reformula las ecuaciones diofánticas como problemas de optimización binaria polinómica sin restricciones (PUBO) y utiliza el valor mínimo de la función de costo resultante para evaluar su resolubilidad, empleando el Algoritmo Cuántico de Optimización Aproximada (QAOA) [1], bajo cierto ratio de error [3].

Como prueba de concepto, aplicamos el procedimiento a varias ecuaciones Diofánticas, como por ejemplo, la ecuación de Catalan, el número de Hardy–Ramanujan, la ecuación de Erdős–Strauss y la ecuación de Pell, abarcando casos con soluciones conocidas. Adicionalmente estudiamos dos ecuaciones diofánticas, una que se conoce que no tiene solución y otra que aún no se ha demostrado su resolubilidad. Adicionalmente, analizamos la escalabilidad y complejidad del procedimiento al aplicarlo a un sistema de ecuaciones diofánticas cuya irresolubilidad es equivalente a la Hipótesis de Riemann [4, 5, 6, 7].

Palabras clave: Problemas tipo PUBO (HOB0), Ecuaciones Diofánticas, QAOA.

Referencias

- [1] Edward Farhi, Jeffrey Goldstone, and Sam Gutmann. *A quantum approximate optimization algorithm*, 2014.
- [2] E. Farhi, J. Goldstone, S. Gutmann, M. Sipser, Quantum computation by adiabatic evolution, *Chemical Physics Letters* Volume 219, Issues 5–6, 18 March 1994, Pages 343–348.
- [3] Kostas Blekos, Dean Brand, Andrea Ceschini, Chiao-Hui Chou, Rui-Hao Li, Komal Pandya, Alessandro Summer, A review on Quantum Approximate Optimization Algorithm and its variants. *Physics Reports*, Volume 1068, 2024. Pages 1–66. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2024.03.002>.
- [4] J.M. Hernández Cáceres, *The Riemann Hypothesis and Diophantine Equations*, Master’s Thesis Mathematics, Mathematical Institute, University of Bonn, 2018.
- [5] B. Z. Moroz, *The Riemann hypothesis and the Diophantine equations*, Preprint no. 2018-03 (St. Petersburg Math. Soc., St. Petersburg, 2018) [in Russian].
- [6] Matiyasevich, Y.V. *The Riemann Hypothesis As the Parity of Special Binomial Coefficients*. *Dokl. Math.* 106 (Suppl 2), S256–S261 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1064562422700247>
- [7] Moroz, B. Z. and Norkin, A. A. (2020). On a theorem of Matiyasevich. *Mathematical Notes*, 108(3), 344–355.

Agradecimientos. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la ayuda PID 2021-123461 NB-C22 del Ministerio de Asuntos Económicos y Transformación Digital de España; y por la ayuda MRR-MAETD-24-INCIBE-01 del Instituto Nacional de Ciberseguridad (INCIBE).

Mejor aproximación polinómica L_1 -unilateral de funciones truncadas

A. Huertas, J. Quesada

Departamento de Matemáticas, Universidad de Jaén

mhuertas@ujaen.es, jquesada@ujaen.es

La aproximación polinómica en norma L_1 es una técnica fundamental en teoría de la aproximación, especialmente útil cuando se desea minimizar el error absoluto entre una función y su aproximante. En este trabajo nos centramos en el caso de funciones truncadas, definidas como aquellas que se anulan fuera de un intervalo dado. En particular, estudiamos la aproximación L_1 unilateral de funciones del tipo:

$$G_m(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^m}{m!} & x > 0 \end{cases}$$

Buscamos un polinomio P_n de grado a lo sumo n que aproxime a la función G_m de manera unilateral, ya sea por encima de la función o por debajo y que minimice el error L_1 en $[-1, 1]$. Es decir:

$$P_n = \arg \min_{Q \in \mathbb{P}_n} \|G_m - Q\|_{L^1}$$

El estudio se realiza dependiendo del valor del parámetro m , ya que según su valor, el problema presenta comportamientos diferentes. El caso $m = 0$ ya ha sido resuelto y publicado. En esta contribución nos centramos en el caso $m \geq 2$, donde se garantiza la unicidad del polinomio aproximante óptimo. El caso $m = 1$ se estudia por separado, puesto que en él no tenemos asegurada dicha unicidad.

Nuestra metodología se basa en herramientas de interpolación, como los métodos de Hermite y Lagrange, polinomios ortogonales de Jacobi y fórmulas de cuadratura positiva. Esto nos permite caracterizar explícitamente los nodos de interpolación y construir los polinomios que mejor aproximan a G_m de manera unilateral, tanto desde arriba como desde abajo.

Nuestros resultados muestran que los nodos óptimos coinciden con los ceros de combinaciones de polinomios de Jacobi, como:

$$(1+x)J_k^{(0,1)}(x), \quad (1-x)J_k^{(1,0)}(x), \quad \text{etc.}$$

lo cual refuerza el vínculo entre aproximación L_1 y teoría de ortogonalidad. Esta investigación contribuye al entendimiento de aproximaciones con restricciones, con aplicaciones potenciales en diversos ámbitos de la Matemática Aplicada.

Palabras clave: Aproximación polinómica; Norma L_1 ; Aproximación unilateral; Funciones truncadas; Polinomios de Jacobi.

Intermittent turbulence in a Rayleigh-Bénard problem studied using Schwarz domain decomposition

Darío Martínez, Henar Herrero, Francisco Pla

Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha

`dario.martinez@uclm.es`

El problema de Rayleigh-Bénard [1] y [2] presenta muy diferentes soluciones dependiendo del número de Rayleigh. Según éste va aumentando, se encuentran soluciones estáticas, estacionarias, laminares temporales y finalmente turbulentas. Sin embargo, la evolución de un flujo laminar a un régimen completamente turbulento no es repentina. Estos dos regímenes se van alternando para números de Rayleigh entre $\mathcal{O}(10^5)$ y $\mathcal{O}(10^6)$. Este fenómeno se denomina turbulencia intermitente. Nuestro objetivo es estudiar la turbulencia intermitente en un problema de convección de Rayleigh-Bénard. A partir de un flujo estacionario con 3 rollos, se calcula la evolución de las soluciones para números de Rayleigh entre $2,5 \cdot 10^5$ y 10^6 . Sobre estos datos se analizan distintos parámetros y medidas estadísticas, como la energía o el número de Nusselt, para ofrecer una mejor comprensión de lo que ocurre y qué caracteriza cada comportamiento. Todas las soluciones se han calculado utilizando un método de colocación de Legendre con un método de descomposición de dominios de Schwarz, como se muestra en [3] y [4].

Palabras clave: Mecánica de fluidos; Rayleigh-Bénard; Turbulencia intermitente; Descomposición de dominios; Legendre colocación.

Referencias

- [1] H. Bénard, Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, Rev. Gen. Sci. Pures Appl. 11, 1261-1271, 1900.
- [2] Lord Rayleigh. On the convective currents in a horizontal layer of fluid when the temperature is on the under side. Phil. Mag. 32, 529-46, 1916.
- [3] D. Martínez; H. Herrero; and F. Pla *2D Newton Schwarz Legendre Collocation Method for a Convection Problem*, Mathematics, 10(19), 3718 (2022).
- [4] D. Martínez; H. Herrero; and F. Pla *A Schwarz alternating method for an evolution convection problem*, Applied Numerical Mathematics (2023).

Geometric properties of the family of p -parallel bodies

Antonio Roberto Martínez Fernández, María Ángeles Hernández Cifre, Eugenia Saorín Gómez

Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Murcia

antonioroberto.martinez@um.es

We study geometric properties of the family of p -parallel bodies of a convex body K with respect to a gauge body E . In particular, we investigate various regularity properties of their boundaries by means of their 0-extreme vectors, aiming for extensions of several results known for the $p = 1$ case. We also analyze decomposition properties of convex bodies via the p -sum of their p -inner parallel bodies. To this end, we introduce a new convex body associated with K , which is related to the p -parallel bodies and the p -sum of convex bodies, the p -form body, and examine its properties. The latter provides improvements of inequalities involving p -inner parallel bodies, their support functions and mixed volumes.

Keywords: p -inner parallel body, 0-extreme vector, Riemann-Minkowski integral, quermassintegral, p -form body.

References

- [1] M. A. Hernández Cifre, A. R. Martínez Fernández, E. Saorín Gómez (2025). Geometric properties of the family of p -parallel bodies. To appear in *Analysis and Geometry in Metric Spaces*.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por la ayuda 21899/PI/22 “Proyecto financiado por la CARM a través de la convocatoria de Ayudas a proyectos para el desarrollo de investigación científica y técnica por grupos competitivos, incluida en el Programa Regional de Fomento de la Investigación Científica y Técnica (Plan de Actuación 2022) de la Fundación Séneca-Agencia de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia”, y de la ayuda PID2021-124157NB-I00, financiada por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ “FEDER Una manera de hacer Europa”.

On the Halfspace Theorem in the Euclidean Space With Density

Antonio Jesús Ortega Ravelo

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

aortegar@ugr.es

The classical *Strong Halfspace Theorem* of Hoffman and Meeks [1] states that a non-flat, properly immersed minimal surface in $\mathbb{R}^3$ cannot be contained within a half-space. This work explores the extension of this theorem to Euclidean space $\mathbb{R}^3$ endowed with a density $f = e^\phi$. In this setting, minimal surfaces are replaced by *weighted minimal hypersurfaces*, characterized by the equation

$$H + \langle \nabla \phi, N \rangle = 0,$$

where H is the Euclidean mean curvature with respect to a unit normal N . The existence of a half-space theorem in this context depends crucially on the geometric and analytic properties of the density f . Here we will gather previous related results and seek new conditions ensuring that the theorem holds in this setting.

Keywords: half-space theorem; maximum principle; manifolds with density; geometric analysis; minimal surfaces.

References

- [1] D. Hoffman, W. H. Meeks III (1990). The strong halfspace theorem for minimal surfaces. *Invent. Math.*, 101, 373–377.

Acknowledgments. Work in progress under the supervision of César Rosales. This research has been supported by the project PID2023-151060NB-I00, funded by MCIU/AEI/10.13039/501100011033 and the European Social Fund Plus (FSE+).

Variants and Extensions of the Concept of Almost Periodicity in the complex plane

Hadjer Ounis, Juan Matías Sepulcre

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

hadjerounis413@gmail.com

We develop the concepts of semi- c -periodicity, c -uniform recurrence and almost automorphy for functions defined on vertical strips in the complex plane, where c is a non-zero complex number. As an extension of the study performed for functions defined on the real axis, this work aims to investigate the main properties of these classes of functions and establish their connections with the more known class of c -almost periodic functions defined on vertical strips. In fact, we resolve an open problem which was raised in 2020 for the real case.

Keywords: Almost periodicity; Semi- c -periodicity; c -uniform recurrence; Almost automorphy; c -almost periodicity.

References

- [1] E. Alvarez, A. Gomez, M. Pinto (2018). (w, c) -periodic functions and mild solutions to abstract fractional integro-differential equations. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 16, 1–8.
- [2] A. S. Besicovitch (1954) *Almost Periodic Functions*. Dover.
- [3] G. M. N'Guérékata (2001) *Almost automorphic and almost periodic functions in abstract spaces*. Springer Science and Business Media.
- [4] M. T. Khalladi, M. Kostic, M. Pinto, A. Rahmani, D. Velinov (2020). c -Almost periodic type functions and applications. *Nonauton. Dyn. Syst.*, 7 (1), 176–193.
- [5] H. Ounis, J. M. Sepulcre (2023). The class of c -almost periodic functions defined on vertical strips in the complex plane. *Rev. Mat. Complut.*, 36, 707–724.
- [6] H. Ounis, J. M. Sepulcre (2023). Stepanov and Weyl classes of c -almost periodic type functions. *Complex Anal. Oper. Theory*, 17, 124.
- [7] H. Ounis, J. M. Sepulcre (2024). Semi- c -periodicity, c -uniform recurrence and almost automorphy in the complex plane. *Quaest. Math.*, 47 (12), 2399–2428.

Acknowledgments. J. M. Sepulcre's research was partially supported by the Ministry of Science, Innovation and Universities of Spain and the European Regional Development Fund (ERDF) of the European Commission under project number PID2022-136399NB-C21.

Analysis of Low Storage Explicit Runge-Kutta Methods

L. Rández, Ricardo Sáez

IUMA-Departamento Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

randez@unizar.es

In this talk, we examine explicit Runge-Kutta (RK) methods for solving high-dimensional systems of ordinary differential equations (ODEs), which can be implemented using only two memory registers. We refer to these schemes as low-storage explicit Runge-Kutta methods.

To this end, we analyze fourth-order, four-stage explicit low-storage schemes of the van der Houwen, Williamson, Ketcheson, and Calvo type, which can be carried out with just two memory registers per step. In addition, we consider fifth-order, five-stage methods for the numerical solution of linear inhomogeneous ODEs.

We then construct optimal schemes that provide a suitable balance between accuracy and stability. Their performance is assessed by solving several high-dimensional differential systems.

Finally, numerical experiments highlight the competitiveness of the proposed methods when compared with classical Runge-Kutta schemes.

Keywords: Low-storage; Runge-Kutta methods; Time advancing methods.

References

- [1] M. Calvo, J.M. Franco, L. Rández (2003). Minimum storage Runge–Kutta schemes for computational accoustics. *Comp. Math. Appl*, 45, pp. 535-545
- [2] J.H. Williamson (1980). Low-storage Runge–Kutta schemes. *J. Comput. Phys*, 35, pp. 48-56
- [3] P.J. Van der Houwen, B.P. Sommeijer (1987). Explicit Runge–Kutta (Nystrom) methods with reduced phase errors for computing oscillating solutions. *SIAM J. Numer. Anal*, 24, pp. 595-617
- [4] M.H. Carpenter, C.A. Kennedy (1994). A fourth-order 2N-storage Runge–Kutta scheme, NASA TR TM109112.
- [5] F.Q. Hu, M.Y. Hussaini, J. Manthey (1996). Low-dissipation and low dispersion Runge–Kutta schemes for computational accoustics. *J. Comput. Phys*, 124 , pp. 177-191
- [6] C.A. Kennedy, M.H. Carpenter and R.M. Lewis (1999). Low-storage, explicit Runge–Kutta schemes for the compressible Navier-Stokes equations, NASA/CR-1999-209349, ICASE Report (99)

Acknowledgments. Research supported by project Project PID2022-141385NB-I00, Ministerio de Economía y Competitividad (Spain).

6

Otras actividades



Exposición: «RSME-Imaginary»

Durante los días del congreso, los asistentes podrán disfrutar de **RSME-Imaginary**, una exposición interactiva que acerca las matemáticas a través de imágenes, modelos y experiencias visuales sorprendentes. Estará abierta en la **Sala Aifos** de la Facultad de Filosofía y Letras del Campus de la Universidad de Alicante, ofreciendo una oportunidad única para descubrir la belleza y el poder creativo de las matemáticas. Más información [aquí](#).

Exposición: «En los Orígenes: Arte y Matemática en la Prehistoria»

Suele considerarse que el arte es una manifestación propia de nuestra especie mediante la cual podemos expresar y/o generar sentimientos en otras personas mediante recursos visuales, sonoros, etc. También es una forma de comunicar mensajes entre el autor de la obra y sus espectadores. Y es que el arte son códigos, son símbolos que se transmiten y, en ocasiones, se entienden.

El arte figurativo prehistórico podría tener una finalidad estética, pero los signos abstractos como claviformes, escaleriformes o las colecciones de puntos o trazos difícilmente podrían considerarse obras de arte.

¿Podría interpretarse su significado desde otra perspectiva, la de la matemática? ¿Tendría una finalidad contable su aparición en grupos de dos, cinco, diez o treinta?

En relación a esta exposición, Francisco A. González Redondo (UCM, RSME) impartirá la charla titulada «Arte, Género y Matemática en la Prehistoria» el jueves 22 de enero de 2026 a las 15:15h en el Salón de Actos del Aulario II.

Consulta el tríptico al final de esta sección.

Exposición: «50 Aniversario de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Alicante»

Durante los días del congreso, los asistentes podrán disfrutar de forma gratuita de esta exposición y de la programación didáctica 2025-26, que estará abierta al público en el **Museo de la Universidad de Alicante** de 9:00 a 20:00h.

Además, en la Sala Juana Francés de la Sede Universitaria Ciudad de Alicante se podrá disfrutar de la **exposición de Fotografía Científica** asociada al 50 Aniversario de la facultad.

Exposición: «Women Do Science»

Visibilizamos a científicas, rompemos con estereotipos de género y damos referentes en el entorno STEAM: Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas. Más información en el enlace <https://www.cientificascasio.com>.

Exposición: «¿Puede pensar una máquina? Computación y Automática en la obra del Ingeniero Total»

En relación a esta exposición, Francisco A. González Redondo (UCM, RSME) impartirá la charla titulada «¿Puede pensar una máquina? Los orígenes de la Inteligencia Artificial» el jueves 22 de enero de 2026 a las 09:45h en el IES María Blasco.

También está disponible en RTVE A la carta el capítulo «Orígenes de las matemáticas con nombre de mujer», del programa «A hombros de gigantes» de Radio 5, que cuenta con una entrevista a Francisco A. González Redondo sobre la exposición.

Consulta el tríptico al final de esta sección.

Jornadas de Formación para Profesorado de Secundaria: Cómo mejorar la enseñanza de las matemáticas en ESO y Bachillerato

Los días jueves 22 y viernes 23 de enero, de 16 a 20h, tendrán lugar estas jornadas en el Aulario II del Campus de la Universidad de Alicante.

El programa incluye una sesión plenaria titulada «Cómo ser docente de matemáticas competente: desarrollo de una mirada profesional» e impartida por Àngela Buforn Lloret (Universidad de Alicante) el jueves de 16:30h a 17:30h y los siguientes talleres:

- *Uso del cómic y materiales manipulativos en el aula de matemáticas*, por Pedro Antonio Martínez Ortiz.
- *Gamificación y escape room para dinamizar el aula de matemáticas*, por Manuel Torrens Berenguer.
- *Una imatge, una interpretació i una sorpresa*, por José Luis Requena Sala e Inmaculada Tudela.
- *Teselado el plano. Construyendo bóvedas*, por Israel Mercado Hurtado.
- *Matemáticas con sentido*, por Fidel Pastor Sogorb.
- *La calculadora en los centros educativos*, por José Aurelio Pina Romero.

Consulta el programa completo al final de esta sección. Más información sobre los talleres [aquí](#).

El profesorado de secundaria de la Comunidad Valenciana se puede inscribir a través de la página [OVIFOR](#) con el código 26AL53ES007 y el título «Cómo mejorar la enseñanza de las matemáticas en ESO y Bachillerato».

Si no es el caso, la inscripción a las jornadas se ha de realizar a través de [este formulario](#) antes del 20 de enero de 2026.

Mesa redonda: «Cooperación al desarrollo y colaboración internacional en Matemáticas»

- Miércoles, 21 de enero de 2026, 09:45-10:30h, Salón de actos del Aulario II.
- Objetivos: Debatir sobre los posibles mecanismos de cooperación al desarrollo en Matemáticas y de colaboración internacional para visibilizarlos e incentivar la participación española en este tipo de actividades a nivel científico e institucional.
- Modera: Clementa Alonso González (Miembro del Executive Team de CIMPA y de la RRII-RSME).
- Participantes:
 - Olga Gil Medrano (Miembro de la CDC-IMU hasta 2022)
 - Eduardo Liz Marzán (Presidente del área de Matemáticas en la AEI)
 - Jorge Mozo Fernández (Secretario de CIMPA y presidente de la CDC-CEMat)
 - Begoña Vitoriano Villanueva (Presidenta de la SEIO hasta 2025 y miembro de la CDC-CEMat)

Mesa redonda: «La enseñanza de matemáticas en riesgo: diagnóstico y propuestas para una profesión imprescindible»

- Viernes, 23 de enero de 2026, 09:45-10:30h, Salón de actos del Aulario II.
- Descripción: La falta de personal docente especializado en matemáticas es un problema creciente que afecta a la educación obligatoria. En esta mesa redonda se analizarán las causas y se debatirán estrategias para atraer y retener talento en la docencia.
- Modera: Irene Ferrando Palomares (Universitat de València, RSME).
- Participantes:
 - Mar Moreno Moreno (Universidad de Alicante)
 - Antonio Moreno Verdejo (Universidad de Granada, CEMat)
 - Núria Planas Raig (Universitat Autònoma de Barcelona, SEIEM)
 - Carlos Segura Cordero (Universitat de València, RSME)

Ruta matemática por el Campus de la Universidad de Alicante

Los congresistas podrán realizar una ruta matemática por el [Campus de la Universidad de Alicante](#), en la que descubrirán elementos de reconocible valor matemático integrados en la arquitectura y entorno del campus. Esta iniciativa propone un itinerario autoguiado que pone en contexto cómo estos espacios han inspirado actividades docentes y divulgativas, invitando a mirar el campus con otros ojos.

Consulta el mapa de la ruta al final de esta sección.

Stands

En el vestíbulo del Aulario II contaremos con varios stands: Springer; EMS and EMS Press; Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alicante; Societat Catalana de Matemàtiques.

Presentación del libro «Matemáticas de lo cotidiano»

El jueves 22 de enero a las 19h, en la librería "80 mundos" situada en la calle Segura, 22, de Alicante, tendrá lugar la presentación de este libro de la editorial Pinolia que reúne 19 colaboraciones de reconocidos divulgadores nacionales. La presentación contará con la asistencia de tres de sus autores: la presidenta de la RSME, Victoria Otero, la directora del IMUS, María Ángeles Japón y el coordinador del volumen, Pedro J. Miana.

Visita a la casa natalicia de Jorge Juan y Santacilia y a las instalaciones de la empresa Carmencita, en Novelda

El jueves 22 de enero, en horario vespertino, la organización del congreso ofrecerá la oportunidad de desplazarse al cercano municipio de [Novelda](#) para visitar la casa natalicia del ilustre matemático [Jorge Juan y Santacilia](#). Tras esta visita, se tendrá también la ocasión de recorrer las instalaciones de la reconocida empresa [Carmencita](#) para descubrir sus innovadores procesos de producción, que conjugan la tradición artesanal con la tecnología más avanzada, que constituye la esencia de su éxito en el ámbito agroalimentario. El formulario de inscripción al congreso incluye un apartado para que los participantes indiquen su preferencia de inscripción a esta actividad, que combina un homenaje a la ciencia y la historia local con una inmersión en la innovación empresarial.

Visita previa a la comida institucional

Para la visita previa a la comida institucional del miércoles 21 de enero hay que estar presentes a las 11:15h en la puerta principal del Aulario II del Campus de la Universidad de Alicante. Visitaremos el [Yacimiento Arqueológico de la Alcudia](#), enclave estrechamente vinculado al hallazgo de la Dama de Elche.

Visita a los museos de la Universidad de Alicante

En el enlace <https://museosdealicante.com> encontraréis toda la información básica sobre los distintos museos de la ciudad de Alicante para poder visitar por vuestra cuenta a lo largo de los días del congreso. En muchos de ellos la entrada es gratuita para docentes, como por ejemplo en el [Museo Arqueológico de Alicante \(MARQ\)](#).

Suele considerarse que el arte es una manifestación propia de nuestra especie mediante la cual podemos expresar y/o generar sentimientos en otras personas mediante recursos visuales, sonoros, etc. También es una forma de comunicar mensajes entre el autor de la obra y sus espectadores. Y es que el arte son códigos, son símbolos que se transmiten y, en ocasiones, se entienden.



El arte figurativo prehistórico podría tener una finalidad estética, pero los signos abstractos como claviformes, escaleriformes o las colecciones de puntos o trazos difícilmente podrían considerarse obras de arte.

¿Podría interpretarse su significado desde otra perspectiva, la de la matemática? ¿Tendría una finalidad contable su aparición en grupos de dos, cinco, diez o treinta?

ARTE Y REGISTRO SIMBÓLICO



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID



ASOCIACIÓN
REINOS DE ESPAÑA



ASOCIACIÓN
ESPAÑOLA PARA EL
AVANCE DE LA
CIENCIA

Concebida por Francisco A. González Redondo (UCM, RSME)

En los **ORÍGENES** ARTE y MATEMÁTICA en la PREHISTORIA

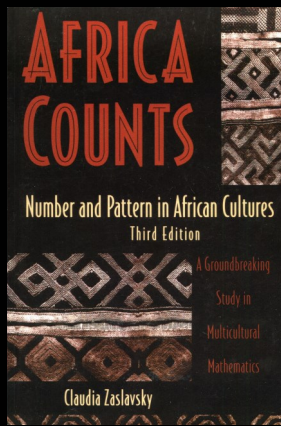


EXPOSICIÓN

19 a 23 de enero de 2026



Si en 1991 Dana Taylor consideraba que “la naturaleza cíclica de la menstruación ha jugado un papel esencial en el desarrollo de la contabilidad, la matemática y la medida del tiempo”, unos meses después Claudia Zaslavsky afirmaba que “Las mujeres fueron los primeros matemáticos de la Historia” al responder a su propia pregunta acerca de “¿quién sino una mujer que lleva la cuenta de sus ciclos necesitaría un calendario lunar?”.



Historiadores de la matemática como Grattan-Guinness admiten “la posibilidad de que las mujeres del pasado percibieran la correlación entre las fases lunares y sus períodos”. Prehistoriadoras como M. Patou-Mathis y M. Sánchez Romero reivindican el papel de las mujeres en el pasado. Sin embargo, aún no se ha conseguido corroborar la “conjetura Zaslavsky”.

LA CONJETURA
ZASLAVSKY

Todos los libros de Historia de la Matemática dedican un primer capítulo a la posible presencia de conceptos matemáticos en la Prehistoria, muchas veces recurriendo a analogías con sociedades ágrafas contemporáneas. En general, mencionan algún hueso con marcas rítmicas, usualmente caracterizadas como “marcas de caza” y atribuidas a varones, análogas a las tarjetas habituales hasta nuestros días.



Pero las miradas aritméticas al arte rupestre se pueden completar con plausibles interpretaciones astronómicas o calendáricas. No sabemos si los autores fueron hombres o mujeres, pero 30 son los puntos que aparecen bajo el *cheval chinois* en la cueva de Lascaux, los destacados en la *galería de los discos* de la cueva de El Castillo, en torno al antropomorfo en el abrigo de la Calderita, etc.

MATEMÁTICA EN
LA PREHISTORIA

En el nivel Solutrense de Altamira se encontraron 4 colgantes en hueso hioides de caballo con el mismo tipo de decoración en sus bordes: unas 30 muescas cortas, transversales y paralelas. En conjunto, constituyen una colección de ocho caras, concebida como unidad de expresión simbólica, un concepto global compuesto de ocho subconceptos; un ciclo compuesto de ocho ciclos, manifestación de pensamiento recursivo.



30 es la duración de una lunación (29,53 días). ¿Qué varón del paleolítico iría grabando, una a una (¿día a día?), 30 marcas en cada una de las ocho caras? ¿Se estarían contando los ocho meses que transcurren desde la constatación de la primera falta hasta que la futura madre tiene que estar preparada para el inminente parto? ¿Se conseguirá corroborar algún día la ‘conjetura Zaslavsky’?

ALTAMIRA ES
NOMBRE DE MUJER

LOS DIRIGIBLES

Para la construcción del dirigible patentado entre 1902 y 1906, Torres Quevedo contó con la colaboración del capitán Alfredo Kindelán, primero en el Frontón Beti Jai de Madrid en 1905, y, a partir de 1906, en el Polígono de Aerostación de Guadalajara, aunque las pruebas del *Torres Quevedo* nº 1 de 640 m³, en 1907, y del *Torres Quevedo* nº 2 de 950 m³, en 1908, terminaron con su desencuentro.

Trasladados los ensayos a París, la casa Astra compraría la patente, y, a partir de 1911, construiría el *Astra-Torres* nº 1, *Pilatre de Rozier, Alsace* y *La Flandre* para el Ejército Francés, y los *Astra-Torres* XIV, XVI, XVII y XIX para el Amirantazgo Británico.



Durante la I Guerra Mundial, Astra fabricaría los AT-1 a AT-4 de 6.500 m³, AT-5 a AT-9 de 7.600 m³, y los AT-10 a AT-17 de 8.300 m³. Se transfirieron a la US Navy los AT-1 y AT-13, y el AT-18 de 10.700 m³. En 1922 se entregaría el AT-47 para Japón y en 1923 el último *Astra-Torres* de la Marina Francesa, el AT-24.

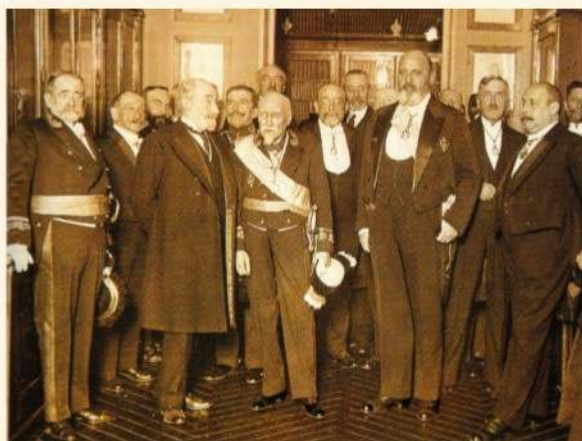
Por su parte, el Almirantazgo británico construyó tres series: *Coastal* (30 unidades de 4.810 m³), *Coastal Star* (10 de 5.960 m³) y *North Sea* (18 de 10.190 m³). Se vendieron además cuatro *Coastal* a Rusia, uno a la Marina Francesa y un *North Sea* a la US Navy.

Zodiac construiría los V11 y V12 entre 1931 y 1936 y el *Dinosaure* en 1976. En el siglo XXI podemos ver las ideas de Torres Quevedo en el V907C de los franceses Voliris, el DZ-E1 de la Sociedad Aeronáutica Rusa, el P-791 de los norteamericanos Lockheed Martin, el *Airlander 10* de los británicos Hybrid Air Vehicles, etc.

LEONARDO TORRES QUEVEDO

Nacido el 28 de diciembre de 1852 (el mismo año que nacieron otros genios como Santiago Ramón y Cajal o Antonio Gaudí) Torres Quevedo fue caracterizado por Maurice d'Ocagne (Presidente de la Sociedad Matemática de Francia) en 1930, en las páginas de *Le Figaro*, como "el más prodigioso inventor de su tiempo", un tiempo que coincide con el de Thomas Alva Edison (1847-1931), Alexander Graham Bell (1847-1922), Nikola Tesla (1856-1943) o Guglielmo Marconi (1874-1937).

Como tantas veces ha pasado en nuestra historia, tuvo que se un extranjero (en este caso, un francés) el que reconociera la genialidad de un español.



En efecto, nuestro Leonardo concibió, patentó y construyó el primer teleférico concebido expresamente para el transporte de personas. Patentó y desarrolló un sistema de dirigibles que se consagró durante la I Guerra Mundial y cuyas novedades siguen vigentes hoy en día. Patentó también el telekino, el primer sistema de control remoto completo de la Historia.

Y, sobre todo, con sus *Ensayos sobre Automática*, sus ajedrecistas y el aritmómetro electromecánico, se adelantó varias décadas a los pioneros de la IA y la Computación, tanto a los teóricos como a los constructores de las primeras computadoras.

Fue el primero que se planteó la pregunta "¿Pueden pensar las máquinas?" ... y el primero que aportó tanto una respuesta teórica como una materialización práctica, construyendo máquinas que "imitaban" el pensamiento humano.

EXPOSICIÓN

19 a 23 de enero de 2016

¿PUEDE PENSAR UNA MÁQUINA?

Computación y Automática en la obra del INGENIERO TOTAL



Comisario: Francisco A. González Redondo (UCM)

Producción: Espacio LEONARDO Torres Quevedo

Realización: asociaciones Reinos de España y 21 Salvas



A.D. 216ALV46



EL TRANSBORDADOR

En torno a 1883 Leonardo Torres Quevedo inicia sus estudios para conquistar los aires mediante su *transbordador*, un funicular de cables múltiples a tensión constante e independiente de la carga transportada, ensayando en 1885 un primer modelo con una luz de unos doscientos metros y un desnivel de cuarenta, en el entorno de la Casa de Doña Jimena, en Portolín (Molledo, Cantabria).

Le seguiría en 1886 un segundo prototipo que serviría de base para la patente presentada en 1887 en España, Austria-Hungría y Alemania, en 1888 en Francia, Reino Unido e Italia, y en 1889 en EE.UU. y Suiza, país en el que iniciaría la construcción (en el Monte Pilatus, en las proximidades del lago Lucerna) del que acabaría constituyendo su "fracaso suizo".



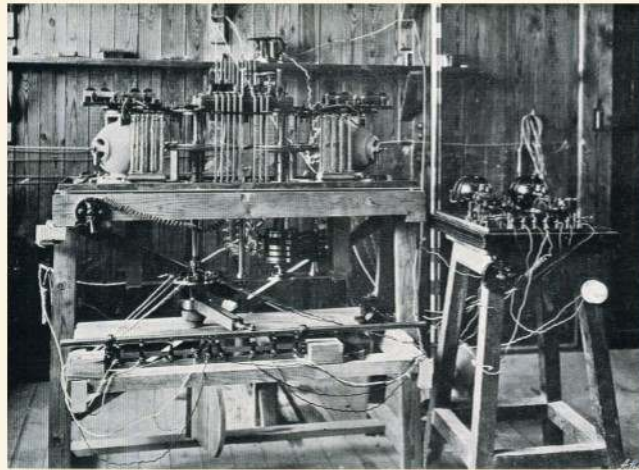
En torno a 1890 pasa a dedicarse de pleno al desarrollo de sus *máquinas algébricas*, máquinas de calcular que resuelven ecuaciones. En torno a 1900 se adentra en la solución del problema de la navegación aérea con sus dirigibles *autorrígidos* y concibe el *telekino*, hasta septiembre de 1907, cuando se inauguraba en San Sebastián el *transbordador* del Monte Ulía, el primer teleférico abierto al público del mundo.

Finalmente, en agosto de 1916 se inauguraba en Canadá, sobrevolando también territorio de los EE.UU., el *transbordador* del Niágara, primer teleférico para personas de Norteamérica y único del sistema Torres Quevedo que continúa en funcionamiento hoy, tras más de cien años sin haber sufrido ningún accidente.

EL TELEKINO

El 10 de diciembre de 1902 Torres Quevedo presenta en Francia la solicitud de patente del *telekino*: "Système dit *télékine* pour commander à distance un mouvement mécanique", el primer sistema de mando a distancia del mundo, concebido para comandar dirigibles sin arriesgar vidas humanas; un autómata capaz de memorizar, interpretar y ejecutar una serie de mandatos recibidos desde un emisor de ondas hertzianas.

En agosto de 1903 presenta un primer modelo del *telekino* ante la Academia de Ciencias de París demostrando cómo su aparato es capaz de teledirigir cualquier vehículo, como destaca toda la prensa mundial de la época y solicita la patente en España, Reino Unido y EE.UU., completada el 9 de diciembre con una adición en Francia.



A lo largo de 1905 realiza ensayos teledirigiendo un triciclo en el Frontón Beti-Jai de Madrid y gobernando el movimiento a distancia de sendos botes en el estanque de la Casa de Campo de Madrid y en la ría de Bilbao, pruebas que culminaron en septiembre de 1906, en el Abra de Bilbao, con los ensayos "oficiales" ante el Rey Alfonso XIII y los principales políticos, empresarios y periodistas de Vizcaya.

No realizaría pruebas con los dirigibles, mientras la Armada española desestimaba sus propuestas de teledirección de torpedos, por lo que D. Leonardo da por terminado el ciclo del *telekino* como mando a distancia, y, en tanto que autómata electro-mecánico, lo erige como el punto de partida de su *Automática*.

COMPUTACIÓN. AUTOMÁTICA

Completadas con éxito las pruebas del *telekino* en Bilbao en presencia del Rey Alfonso XIII, el Ministerio de Fomento crea en febrero de 1907 el Laboratorio de Mecánica Aplicada para que Torres Quevedo pueda completar la construcción de sus *máquinas algébricas* propuestas a finales del s. XIX y desarrolle el potencial implícito en el *telekino* como el primer autómata electromecánico de la historia.

En 1910 presenta "algunas consideraciones generales sobre los procedimientos de automatización mecánica que permiten sustituir, con frecuencia, el trabajo inteligente del obrero, [por] el trabajo puramente mecánico de una máquina", diseños de la primera computadora digital de la historia y primera versión de "un nuevo cuerpo de doctrina".



Entre 1913 y 1914 presenta en Madrid y París su *primer ajedrecista*, un autómata electromecánico que juega un final de partida de ajedrez de torre y rey contra rey, y derrota siempre al humano, demostrando de forma práctica las posibilidades de la Inteligencia Artificial.

En 1914 publica sus *Ensayos sobre Automática*, definiendo esta nueva ciencia, referida a "autómatas dotados de discernimiento", que ejemplifica con los diseños de una "máquina analítica" electromecánica.

Finalmente, entre 1919 y 1920 completa su *aritmómetro electromecánico* que, con su teclado, unidad de computación, memoria artificial e impresora puede considerarse el primer paso hacia el ordenador en sentido actual de la historia.



RUTA MATEMÀTICA:

Al campus de la Universitat d'Alacant trobem molts elements de marcat caràcter matemàtic que han inspirat el disseny de diferents activitats docents i divulgatives. Així, per exemple, la geometria euclidiana es deixa veure en molts dels edificis i jardins. Aquesta ruta li guiarà per diferents racons del campus on la bellesa d'aquest magnífic entorn està indissolublement lligada al misteriós atractiu de les matemàtiques.

RUTA MATEMÀTICA:

En el campus de la Universidad de Alicante encontramos muchos elementos de marcado carácter matemático que han inspirado el diseño de diferentes actividades docentes y divulgativas. Así, por ejemplo, la geometría euclidiana se deja ver en muchos de los edificios y jardines. Esta ruta le guiará por diferentes rincones del campus donde la belleza de este magnífico entorno está indisolublemente ligada al misterioso atractivo de las matemáticas.

● Punts d'interés

1. Facultat de Ciències, Fase II: Pèrgola metàl·lica rectangular amb suports cilíndrics i segments paral·lels i perpendiculars.
2. Entrada principal, Facultat de Ciències, Fase II: Hexàgon irregular i escales trapezoidals.
3. Plaça de Miguel Hernández: Superfície reglada (generada pel moviment d'una recta)
4. Exteriors de Filosofia i Lletres III: Superfície metàl·lica sinusoidal.
5. Escultura "Armonia": Obra amb dues figures iguals en grup de simetria.
6. Zona militar amb pins: Termes de la successió de Fibonacci a través de les fileres espirals d'escates
7. Facultat de Ciències de la Salut: Torre elevada cilíndrica.
8. Racó dels Poetes: Càvecs (grades amb fileres concèntriques i graderies ascendents) i coronas circulars.
9. Torre de Control: Planta en forma de U i semicilindre posterior.
10. Rectorat: Pati simètric en forma de U i línies paral·leles que visualitzen un punt de fuga.
11. Relotge solsticial: Hiperboles en el sol (solsticis) i línies perpendiculars (equinoccis).
12. Escultura "Armonia": Obra amb dues figures iguals en grup de simetria.
13. Biblioteca General: Edifici rectangular de gran volum amb suports piramidals truncats.
14. Vistes del MUA: Ortoedre camuflat amb parets rectangulars.
15. Edifici d'Òptica i Optometria: Dos blocs rectangulars units per un prisma.
16. Ciències Socials: conjunt de tres prismes paral·lels formant un fris.
17. Aulari II: Formes semicirculars (teatre, anfiteatre, hemicicle) amb càvecs (graderies), semielipses i rectangles congruents.
18. Jardí tropical: Estructura metàl·lica amb triangulacions.
19. Relotge de sol: Triangle rectangle i gràfic de l'equació del temps (amb desfasament eclíptic).
20. Yuri Gagarin: Piràmide truncada amb raó àuria (la longitud del costat de la base està en proporció àuria a la del costat de la secció superior).
21. Escola Politècnica Superior: Cilindres adossats per a les comunicacions verticals.
22. Arc de corba al costat de Politècnica III.
23. Camí entre Politècnica i Ciències: Forma circular amb vegetació.
24. Arcs de mig punt en edificis propers.
25. En general: Mosaics i tessel·lacions (regulars, semi-regulars i no regulars) i recobriments simètrics del pla en paviments, enrajolats, gelosies, paret recoberta per taulells o enrajolat en l'esquelet d'un edifici (o façana). També es poden observar columnes de nombrosos tipus: cilíndriques, cúbiques, etc.

● Puntos de interés

1. Facultad de Ciencias, Fase II: Pérgola metálica rectangular con soportes cilíndricos y segmentos paralelos y perpendiculares.
2. Entrada principal, Facultad de Ciencias, Fase II: Hexágono irregular y escaleras trapezoidales.
3. Plaza de Miguel Hernández: Superficie reglada (generada por el movimiento de una recta)
4. Exteriores de Filosofía y Letras III: Superficie metálica sinusoidal.
5. Escultura "Armonia": Obra con dos figuras iguales en grupo de simetría.
6. Zona militar con pinos: Términos de la sucesión de Fibonacci a través de las hileras espirales de escamas
7. Facultad de Ciencias de la Salud: Torre elevada cilíndrica.
8. Rincón de los Poetas: Cávecs (gradas con hileras concéntricas y graderías ascendentes) y coronas circulares.
9. Torre de Control: Planta en forma de U y semicilindro posterior.
10. Rectorado: Patio simétrico en forma de U y líneas paralelas que visualizan un punto de fuga.
11. Reloj solsticial: Hipérbolas en el suelo (solsticios) y líneas perpendiculares (equinoccios).
12. Escultura "Armonia": Obra con dos figuras iguales en grupo de simetría.
13. Biblioteca General: Edificio rectangular de gran volumen con soportes piramidales truncados.
14. Vistas del MUA: Ortoedro camuflado con paredes rectangulars.
15. Edificio de Óptica y Optometría: Dos bloques rectangulars unidos por un prisma.
16. Ciencias Sociales: conjunto de tres prismas paralelos formando un fris.
17. Aulario II: Formas semicirculares (teatro, anfiteatro, hemiciclo) con cávecs (graderías), semielipses y rectángulos congruentes.
18. Jardín tropical: Estructura metálica con triangulaciones.
19. Reloj de sol: Triángulo rectángulo y gráfico de la ecuación del tiempo (con desfase eclíptico).
20. Yuri Gagarin: Pirámide truncada con proporción áurea (la longitud del lado de la base está en proporción áurea a la del lado de la sección superior).
21. Escuela Politécnica Superior: Cilindros adosados para las comunicaciones verticales.
22. Arco de curva junto a Politécnica III.
23. Camino entre Politécnica y Ciencias: Forma circular con vegetación.
24. Arcos de medio punto en edificios cercanos.
25. En general: Mosaicos y teselaciones (regulares, semi-regulares y no regulares) y recubrimientos simétricos del plano en pavimentos, embaldosados, celosías, pared recubierta por azulejos o enladrillado en el esqueleto de un edificio (o fachada). También se pueden observar columnas de numerosos tipos: cilíndricas, cúbicas, etc.



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



Punt de localització de inici de ruta
Punto de localización de inicio de ruta

Cómo mejorar la enseñanza de las matemáticas en ESO y Bachillerato

22 y 23 de enero de 2026, de 16:00 h a 20:00 h
Aulario II de la Universidad de Alicante

PROGRAMA

Jueves, 22 de enero de 2026

16:00 h – 16:15 h	Recepción / firmas / elección de talleres (vestíbulo)		
16:15 h – 16:30 h	Inauguración de las jornadas (salón de actos)		
16:30 h – 17:30 h	Sesión plenaria (salón de actos) <i>Cómo ser docente de matemáticas competente: desarrollo de una mirada profesional</i> Àngela Bufoñ Lloret, profesora de la Universidad de Alicante		
17:30 h – 18:00 h	Pausa café (vestíbulo)		
18:00 h – 19:00 h	Taller 1 (aula B12) <i>Uso del cómic y materiales manipulativos en el aula de matemáticas</i> Pedro Antonio Martínez	Taller 2 (aula B13) <i>Gamificación y escape room para dinamizar el aula de matemáticas</i> Manuel Torrens Berenguer	Taller 3 (aula A11) <i>Una imatge, una interpretació i una sorpresa</i> José Luis Requena Inmaculada Tudela
19:00 h – 20:00 h	Taller 1 (aula B12) <i>Uso del cómic y materiales manipulativos en el aula de matemáticas</i> Pedro Antonio Martínez	Taller 2 (aula B13) <i>Gamificación y escape room para dinamizar el aula de matemáticas</i> Manuel Torrens Berenguer	Taller 3 (aula A11) <i>Una imatge, una interpretació i una sorpresa</i> José Luis Requena Inmaculada Tudela



CEFIRE
ALACANT

Viernes, 23 de enero de 2026

16:00 h – 16:15 h	Recepción / firmas / elección de talleres (vestíbulo)		
16:15 h – 17:15 h	Taller 4 (aula E04) <i>Teselando el plano. Construyendo bóvedas</i> Israel Mercado Hurtado	Taller 5 (aula D03) <i>Matemáticas con sentido</i> Fidel Pastor Sogorb	Taller 6 (aula D04) <i>La calculadora en los centros educativos</i> José Aurelio Pina Romero
17:15 h – 17:45 h	Pausa café (vestíbulo)		
17:45 h – 18:45 h	Taller 4 (aula E04) <i>Teselando el plano. Construyendo bóvedas</i> Israel Mercado Hurtado	Taller 5 (aula D03) <i>Matemáticas con sentido</i> Fidel Pastor Sogorb	Taller 6 (aula D04) <i>La calculadora en los centros educativos</i> José Aurelio Pina Romero
18:45 h – 19:45 h	Mesa redonda (salón de actos) Mar Moreno, profesora de la Universidad de Alicante Israel Mercado Hurtado Fidel Pastor Sogorb		
19:45 h – 20:00 h	Clausura de las jornadas (salón de actos)		

ORGANIZA:



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



UNIDADES PARTICIPANTES DE LA UA:

UA

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Vicerrectorado de Cultura, Deporte y Extensión Universitaria
Vicerrectorado de Infraestructuras, Sostenibilidad y Seguridad Laboral
Vicerrectorado de Investigación

UA

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escuela Politécnica Superior
Facultad de Ciencias
Facultad de Educación

UA

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Departamento de Innovación y Formación Docente
Departamento de Matemática Aplicada e Ingeniería Aeroespacial
Departamento de Matemáticas

PATROCINADOR ORO:

CASIO
División Educativa

ENTIDADES PATROCINADORAS:



ENTIDADES COLABORADORAS:



Alicante
City & Beach

Alicante
Convention Bureau

SPRINGER NATURE

MARQ
MUSEO ARQUEOLÓGICO DE ALICANTE

L'Alcúdia



Societat Catalana de Matemàtiques

al
DIPUTACIÓN DE ALICANTE

