Polinomios Ortogonales y Funciones Especiales: Teoría y Aplicaciones

Equipo organizador

- Francisco Marcellán Español (Universidad Carlos III de Madrid)
- Juan José Moreno Balcázar (Universidad de Almería)

Descripción

En esta sesión especial se presentarán desarrollos recientes en el campo de los polinomios ortogonales y las funciones especiales, con un énfasis particular en sus aspectos analíticos y computacionales. Se explorarán también las interacciones de estas áreas con otras disciplinas fundamentales, tales como el Álgebra Lineal, las Ecuaciones Diferenciales, la Teoría de Operadores, el Análisis de Fourier y la Física Matemática. A lo largo de las 13 comunicaciones programadas, destacados especialistas abordarán estos temas desde diversas perspectivas, proporcionando una visión actualizada y multidisciplinar del estado del arte en la investigación contemporánea.

Esta sesión especial se enmarca en las actividades de la Red ORTHONET.

Palabras clave: Polinomios ortogonales; Funciones especiales; Aplicaciones.

Programa

LUNES, 19 de enero

15:30 – 16:00	Teresa E. Pérez (Universidad de Granada) *Operadores de tipo Bernstein sobre el simplex para parámetros negativos*
16:00 – 16:30	Juan Antonio Villegas (Universidad de Granada) *Zonal Function Networks desde el punto de vista de la superresolución*
16:30 – 17:00	Miguel Rojas (Universidad Complutense de Madrid) *Perturbaciones de la Medida en la Ortogonalidad Múltiple Mixta*
17:00 – 17:30	María José Cantero (Universidad de Zaragoza) *Una conexión entre la transformación inversa de Darboux y productos de Sobolev via polinomios matriciales*

MARTES, 20 de enero

11:00 – 11:30	Amparo Gil (Universidad de Cantabria) *Algunos problemas de inversión de funciones especiales: algoritmos numéricos e implementaciones computacionales*
11:30 – 12:00	Ester Pérez Sinusía (Universidad de Zaragoza) *La función trascendente de Lerch: nuevos desarrollos convergentes y uniformes*
12:00 – 12:30	Óscar Ciaurri (Universidad de La Rioja) *Funciones de Bessel, teoremas de transplantación y transferencia*
15:30 – 16:00	Cristina Rodríguez Perales (Universidad de Almería) *Ecuación en diferencias para polinomios cuasi-ortogonales*
16:00 – 16:30	Misael E. Marriaga (Universidad Rey Juan Carlos) *Sobre operadores escalera de orden superior para polinomios ortogonales clásicos*
16:30 – 17:00	Juan C. García Ardila (Universidad Politécnica de Madrid) *Polinomios ortogonales generalizados de Gauss-Rys*
17:00 – 17:30	Víctor Soto Larrosa (Universidad de Alcalá y Universidad Europea de Madrid) *Análisis semiclásico de polinomios ortogonales simétricos definidos por un peso Freud truncado*
18:00 – 18:30	Judit Mínguez Ceniceros (Universidad de La Rioja) *Pares coherentes simétricos Dunkl de medidas positivas de segundo tipo*
18:30 – 19:00	Antonio J. Durán (Universidad de Sevilla) *Zeros of linear combinations of orthogonal polynomials*

Operadores de tipo Bernstein sobre el simplex para parámetros negativos

Teresa E. Pérez, Marlon J. Recarte

Instituto de Matemáticas y Departamento de Matemática Aplicada

tperez@ugr.es

Resumen. En este trabajo estudiamos operadores de tipo Bernstein basados en el producto escalar clásico sobre el simplex de $\mathbb{R}^2$. Aparte de resultados estándar, deduciremos propiedades de derivación, y probaremos que los polinomios ortogonales clásicos sobre el simplex son las funciones propias de este operador. Además analizaremos los casos límite cuando alguno de los parámetros es un entero negativo. Finalmente, mostraremos algunos experimentos numéricos.

Referencias

[1] M. M. Derriennic, On multivariate approximation by Bernstein-type polynomials, J. Approx. Theory 45 (1985), no. 2, 155–166.

[2] D. Lara-Velasco, T. E. Pérez, Bernstein-type operators preserving derivatives, Comput. Appl. Math. 43 (2024), no. 277.

[3] G. G. Lorentz, Bernstein polynomials, Chelsea Publishing Company, New York, 1997.

Agradecimientos. Participación financiada por el Proyecto *Aproximación Multivariada con Aplicaciones*, PID2023.149117NB.I00.

Zonal Function Networks desde el punto de vista de la superresolución

Juan Antonio Villegas, Hrushikesh N. Mhaskar, Andrei Martínez-Finkelshtein

Instituto de Matemáticas (IMAG) y Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada

jantoniovr@ugr.es

Resumen. Dada una función par $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida sobre la esfera unitaria, asumimos que f tiene una forma específica (o puede ser aproximada mediante una expresión de esta forma), llamada *Zonal Function Network* (ZF-Network o ZFN):

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{K} d_i \, G(\mathbf{x}, y_i^*), \qquad \text{con } G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|^{2\gamma+1}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y}, y_1^*, \ldots, y_K^* \in \mathbb{S}^2,$$

donde $\gamma > -1/2$ es conocido y $2\gamma + 1$ no es un entero par. Nuestro objetivo es determinar el valor de los coeficientes d_i y los puntos y_i^*, $i = 1, \ldots, K$, a partir de una muestra discreta $\{(x_j, f(x_j))\}_{j=1}^{N}$, $x_j \in \mathbb{S}^2$.

Este problema puede ser abordado de diversas formas, pero en esta charla principalmente utilizaremos técnicas de aproximación basadas en el uso de esféricos armónicos y sus propidades, así como de funciones kernel localizadas, centrándonos en las bases teóricas de esta metodología y mostrando ejemplos e implementaciones prácticas.

Usaremos la muestra de puntos y fórmulas de cubatura para definir una función que indica la localización de los centros $\{y_i^*, i = 1, \ldots, K\}$ y nos ayuda a calcular el valor de los coeficientes $\{d_i, i = 1, \ldots, K\}$. Finalmente, presentaremos algunos ejemplos numéricos que ilustran la efectividad de la metodología propuesta.

Referencias

[1] K. Atkinson, W. Han (2012) *Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction.* Springer.

[2] Q. T. Gia, H. N. Mhaskar (2008). Localized Linear Polynomial Operators and Quadrature Formulas on the Sphere. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47, 440–466.

[3] H.N. Mhaskar, R. O'Dowd (2025). Learning on manifolds without manifold learning. *Neural Networks*, 181.

[4] H. N. Mhaskar (2020). Kernel-based analysis of massive data. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, 6.

[5] H. N. Mhaskar (2019). Function approximation with zonal function networks with activation functions analogous to the rectified linear unit functions. *Journal of Complexity*, 51, 1–19.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por el proyecto "PID2023-149117NB-I00", del Ministerio de Ciencia e Innovación y FEDER, y el proyecto IMAG-María de Maeztu "CEX 2020-001105-M", de "MCIN/AEI/10.13039/501100011033" .

Perturbaciones de la Medida en la Ortogonalidad Múltiple Mixta

Miguel Rojas, Manuel Mañas

Departamento de Física Teórica, Universidad Complutense de Madrid

migroj01@ucm.es

Resumen. En esta charla, enfatizamos el papel decisivo del análisis matricial en el estudio de los polinomios ortogonales. La teoría de los polinomios ortogonales clásicos y el análisis matricial surgen naturalmente en el estudio de las matrices tridiagonales (matrices de Jacobi), cuyo espectro, bajo ciertas condiciones, coincide con el soporte de una medida asociada a una sucesión de polinomios ortogonales. Además, la factorización de Gauss-Borel de la matriz de momentos desempeña un papel fundamental en la caracterización de la ortogonalidad y en el descubrimiento de propiedades estructurales clave.

Nos centramos en los MMOP (polinomios ortogonales con respecto a una matriz de medidas). En este caso, la matriz de Jacobi asociada es una matriz banda, donde el número de diagonales no nulas depende del tamaño de la matriz de la medida. Dentro de este marco, estudiamos cómo se transforman los polinomios ortogonales cuando la matriz de medidas experimenta perturbaciones polinomiales matriciales. La perturbación más general que consideramos sigue la forma de Uvarov:

$$\mathrm{d}\tilde{\mu}(x)R(x) = L(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

donde $R(x)$, $L(x)$ son matrices polinomiales, $\mathrm{d}\mu(x)$ es la matriz de medidas original, y $\mathrm{d}\tilde{\mu}(x)$ la correspondiente matriz de medidas perturbada. Tomando $R(x) = I$ o $L(x) = I$, obtenemos una perturbación de Christoffel o de Geronimus, respectivamente.

La principal contribución de nuestro trabajo es la generalización de estas perturbaciones más allá de polinomios matriciales diagonales, extendiendo la teoría para incluir casos con matrices principales no mónicas. Esta generalización conduce a un análisis de las propiedades espectrales de los polinomios matriciales de la perturbación. Además, reducimos el problema de garantizar la ortogonalidad a un problema de álgebra lineal que involucra la compatibilidad de ciertos sistemas de ecuaciones lineales.

Referencias

[1] M. I. Bueno and F. Marcellán, *Darboux transformation and perturbation of linear functionals*, Linear Algebra and its Applications **384** (2004) 215-242.

[2] M. Mañas and M. Rojas, *General Christoffel Perturbations for Mixed Multiple Orthogonal Polynomials*, arXiv:2405.11630.

[3] M. Mañas and M. Rojas, *General Geronimus Perturbations for Mixed Multiple Orthogonal Polynomials*, Analysis and Mathematical Physics 15, article number 50 (2025).

Agradecimientos. Los autores agradecen el financiamiento por parte del proyecto de investigación [PID2021-122154NB-I00], *Ortogonalidad y Aproximación con Aplicaciones en Machine Learning y Teoría de la Probabilidad*, financiado por, MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por "ERDF A Way of making Europe".

Una conexión entre la transformación inversa de Darboux y productos de Sobolev via polinomios matriciales

M.J. Cantero, L. Moral, L. Velázquez

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

mjcante@unizar.es

Resumen. La transformación directa de Darboux de una matriz CMV conduce a una nueva matriz también CMV. Sin embargo la transformación inversa de Darboux no siempre da lugar a otra matriz CMV, sino a ciertas soluciones relativas a productos tipo Sobolev discretos.
En esta charla se establece una conexión entre Polinomios Ortogonales en la circunferencia unidad con respecto a un producto tipo Sobolev discreto y Polinomios Matriciales en la recta real que clarifica la conexión entre la transformación inversa de Darboux para matrices CMV y productos tipo Sobolev discretos.
Se muestra cómo dicha conexión además permite trasladar el problema de obtener las soluciones de la transformada inversa de Darboux en la circunferencia unidad a un problema de Geronimus matricial en la recta real.

Agradecimientos. Trabajo financiado por la ayuda PID2021–124472NB–I00 del proyecto financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y “FEDER Una manera de hacer Europa”.

Algunos problemas de inversión de funciones especiales: algoritmos numéricos e implementaciones computacionales

Amparo Gil, Javier Segura, Nico M. Temme

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación, Universidad de Cantabria

amparo.gil@unican.es

Resumen. En esta charla discutiremos estrategias asintóticas y numéricas esenciales para la construcción de algoritmos recientes desarrollados por nuestro grupo, orientados a la resolución de diversos problemas de inversión asociados a funciones especiales.

La función trascendente de Lerch: nuevos desarrollos convergentes y uniformes

Ester Pérez Sinusía, José L. López

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

ester.perez@unizar.es

Resumen. La función trascendente de Lerch $\Phi(z,s,a)$ desempeña un papel importante en diversas áreas de las matemáticas y la física, con aplicaciones notables en la mecánica estadística y la teoría cuántica de campos. En este contexto, resulta especialmente relevante obtener nuevas representaciones de $\Phi(z,s,a)$ que sean útiles tanto desde un punto de vista analítico como computacional.
En este trabajo, presentamos desarrollos convergentes novedosos de $\Phi(z,s,a)$ en términos de funciones elementales que son uniformes en la variable z. Tomando como punto de partida la representación integral

$$\Phi(z,s,a)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-ze^{-x}}\,\mathrm{d}x,$$

válida para $\Re(s)>0$, $\Re(a)>0$ si $z\in\mathbb{C}\setminus[1,\infty)$, aplicamos dos métodos analíticos distintos, ambos basados en desarrollos de Taylor multipunto que permiten aproximar transformadas integrales de la forma:

$$F(z)=\int_0^1 h(t,z)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Finalmente, se incluyen diversos experimentos numéricos que ilustran la precisión de las nuevas aproximaciones, así como comparaciones con otros desarrollos conocidos [1].

Referencias

[1] J. L. López, E. Pérez Sinusía (2025). New analytic representations of the Lerch transcendent. *Numer Algor*, https://doi.org/10.1007/s11075-025-02113-w.

Funciones de Bessel, teoremas de transplantación y transferencia

Óscar Ciaurri

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

oscar.ciaurri@unirioja.es

Resumen. Es bien conocido que las funciones especiales juegan un importante papel en algunos aspectos del análisis armónico. Un ejemplo clásico son las funciones de Bessel de primer tipo, que se convierten en el núcleo de la transformada de Fourier cuando actúa sobre funciones radiales. En esos casos suele hablarse de transformada de Hankel. En esta charla mostraremos un resultado sobre acotación uniforme del operador de transplantación para la transformada de Hankel (vinculado a las funciones hipergeométricas, otra familia clásica de funciones especiales) y veremos que da lugar a un teorema de transferencia para multiplicadores de la transformada de Fourier. Estos resultados se ver en [1].

Referencias

[1] Ó. Ciaurri (2025). Uniform weighted inequalities for the Hankel transform transplantation operator. *Preprint*, arXiv:2501.06152.

Ecuación en diferencias para polinomios cuasi-ortogonales

Cristina Rodríguez-Perales, Galina Filipuk, Juan F. Mañas-Mañas, Juan J. Moreno-Balcázar

Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería

crp170@ual.es

Resumen. En esta charla se pretende obtener la ecuación en diferencias de segundo orden que satisfacen los polinomios cuasi-ortogonales de primer orden $s_n(x)$, dados por $s_n(x) = p_n(x) + c_n p_{n-1}(x)$, donde $p_n(x)$ son los polinomios ortonormales relacionados con el operador de Hahn y c_n es una sucesión de constantes.
Para ello, como paso preliminar se comienza obteniendo los operadores escalera, conocidos en la literatura como *ladder operators*, para los polinomios $p_n(x)$. Dichos operadores nos permiten establecer la ecuación en diferencias de segundo orden para estos polinomios, unificando algunos resultados conocidos en la literatura. Finalmente, se ilustran los resultados obtenidos para dos familias de polinomios concretas: cuasi-Krawtchouk y cuasi-little q-Laguerre.

Referencias

[1] Y. Chen, M.E.H. Ismail (1997). Ladder operators and differential equations for orthogonal polynomials. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 30 , 7918–7829.

[2] G. Filipuk, J. F. Mañas-Mañas, J. J. Moreno-Balcázar, C. Rodríguez-Perales. Second–order difference equation for quasi–orthogonal polynomials related to Hahn difference operator. *Enviado.*

[3] M.E.H. Ismail, X.S. Wang (2019). On quasi–orthogonal polynomials: Their differential equations, discriminants and electrostatics. *J. Math. Anal. Appl.*, 474 , 1178–1197.

Agradecimientos. Trabajo financiado por la ayuda PPIT-UAL, Junta de Andalucía-FSE. Programa: 54.A. Aplicación 741; por la ayuda PID2021–124472NB–I00 del proyecto financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y “FEDER Una manera de hacer Europa”; Centro de Investigación CDTIME y Grupo de Investigación FQM–0229 de la Universidad de Almería.

Sobre operadores escalera de orden superior para polinomios ortogonales clásicos

Misael E. Marriaga, Javier Martínez

Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de Materiales y Tecnología Electrónica, Universidad Rey Juan Carlos

misael.marriaga@urjc.es

Resumen. Analizamos la estructura algebraica de los operadores escalera de orden superior para los polinomios ortogonales clásicos (Hermite, Laguerre, Jacobi, Bessel) en términos de sus funcionales de momentos y de dos operadores escalera de primer orden, J_n^+ y J_n^-. Estudiamos expresiones operacionales de estos operadores escalera mediante ciertos operadores integro-diferenciales.

Agradecimientos. MEM agradece el proyecto de investigación [PID2021-122154NB-I00], *Ortogonalidad y Aproximación con Aplicaciones en Machine Learning y Teoría de la Probabilidad*, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por "ERDF A Way of making Europe". MEM y JM agradecen el convenio plurianual de la Comunidad de Madrid con la Universidad Rey Juan Carlos en el marco de los Proyectos I+D para Jóvenes Doctores, Ref. M2731, proyecto NETA-MM.

Polinomios ortogonales generalizados de Gauss-Rys

Juan C. García-Ardila, Francisco Marcellán

Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial, Universidad Politécnica de Madrid

juancarlos.garciaa@upm.es

Resumen. Sea $(P_n(x;z;\lambda))_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al funcional lineal simétrico $\mathbf{u}$ definido por

$$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)(1-x^2)^{(\lambda-1/2)}e^{-zx^2}dx, \qquad \lambda > -1/2, \quad z > 0.$$

Mediante el análisis de los parámetros de la relación de recurrencia de tres términos que satisfacen los polinomios $(P_n(x;z;\lambda))_{n\geq 0}$, mostramos algunos resultados interesantes como los desarrollos asintóticos de estos coeficientes o las ecuaciones discretas de Painlevé y de Painlevé asociadas a ellos. Finalmente, se ofrece una interpretación electrostática de los ceros de dichos polinomios, así como la dinámica de los ceros en términos de los parámetros z y λ.

Referencias

[1] C. M. Cosgrove, *Chazy's second-degree Painlevé equations,* J. Phys. A **39** (2006), 11955-11971.

[2] D. Dominici, F. Marcellán *Truncated Hermite polynomials*, J. Difference Equ. Appl.**29**(2023), no.7, 701–732.

[3] J. C. García-Ardila, F. Marcellán, *Generalized Gauss-Rys orthogonal polynomials,* J. Math. Anal. Appl. 540, 2, 128695, 23 pp. (2024).

[4] M. E. H Ismail *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable.* With two chapters by Walter Van Assche. With a foreword by Richard A. Askey Encyclopedia Math. Appl., 98 Cambridge University Press, Cambridge, 2005. xviii+706 pp.

[5] A. Ramani, B. Grammaticos, Miura transforms for discrete Painlevé equations. J. Phys. A 25 (1992), L633–L637

Agradecimientos. Este trabajo ha sido financiado por la Comunidad de Madrid junto con la Universidad Rey Juan Carlos bajo el proyecto I+D para Jóvenes Doctores, Ref. M2731. La investigación de Francisco Marcellán ha sido financiada por el proyecto de investigación PID2021- 122154NB-I00 *Ortogonalidad y Aproximación con Aplicaciones en Machine Learning y Teoría de la Probabilidad* del MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por "ERDF A Way of making Europe".

Análisis semiclásico de polinomios ortogonales simétricos definidos por un peso Freud truncado

Víctor Soto-Larrosa, Edmundo J. Huertas, Alberto Lastra, Francisco Marcellán

Departamento de Biocencias, Universidad Europea de Madrid / Departamento de Física y Matemáticas. Universidad de Alcalá

victor.soto@universidadeuropea.es / v.soto@uah.es

Resumen. Se introduce y estudia una familia de polinomios ortogonales simétricos $P_n(x; z)$, definidos sobre el intervalo simétrico finito $[-z, z]$ con $z > 0$ y ortogonales con respecto al peso e^{-x^4}. Estos polinomios están asociados a un funcional lineal semiclásico de clase cuatro y presentan propiedades estructurales y asintóticas de gran interés. Se caracterizan los coeficientes $\gamma_n(z)$ de la relación de recurrencia a tres términos, se analizan los momentos asociados a la medida y se deduce la función de Stieltjes correspondiente. A partir de los operadores de subida y bajada se obtiene una ecuación diferencial lineal de segundo orden satisfecha por esta familia. Asimismo, se proporciona una interpretación electrostática de sus ceros y se estudia su comportamiento dinámico en función del parámetro de truncación z. Este trabajo conecta la ortogonalidad truncada con la teoría semiclasica y las ecuaciones de recurrencia no lineales, y contribuye a una mejor comprensión de las familias de polinomios sobre intervalos acotados.

Referencias

[1] S. M. Alsulami, P. Nevai, J. Szabados, W. Van Assche (2015). A family of nonlinear difference equations: Existence, uniqueness, and asymptotic behavior of positive solutions. *J. Approx. Theory*, 193, 39–55.

[2] S. Belmehdi (1992). On semiclassical linear functionals of class $s = 1$. Classification and integral representations. *Indag. Math. (N. S.)*, 3, 253–275.

[3] S. Belmehdi, A. Ronveaux (1994). Laguerre-Freud's equations for the recurrence coefficients of semi-classical orthogonal polynomials. *J. Approx. Theory*, 76(3), 351–358.

[4] Y. Chen, M. E. H. Ismail (1997). Ladder operators and differential equations for orthogonal polynomials. *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 30, 7818–7829.

[5] W. Van Assche (2022). Orthogonal polynomials, Toda lattices and Painlevé equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 193, 39–55.

Agradecimientos. La investigación de Francisco Marcellán ha sido financiada por el proyecto de investigación PID2021- 122154NB-I00 *Ortogonalidad y Aproximación con Aplicaciones en Machine Learning y Teoría de la Probabilidad* del MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por "ERDF A Way of making Europe".

Pares coherentes simétricos Dunkl de medidas positivas de segundo tipo

Judit Mínguez Ceniceros, Francisco Marcellán

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

judit.minguez@unirioja.es

Resumen. Sean dos funcionales lineales simétricos $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ tales que sus correspondientes sucesiones de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n(x; \mathbf{u})\}_{n\geq 0}$ y $\{P_n(x; \mathbf{v})\}_{n\geq 0}$ están relacionados por

$$\frac{T_\mu P_{n+1}(x; \mathbf{u})}{\mu_{n+1}} = P_n(x; \mathbf{v}) - \tau_{n-1} P_{n-2}(x; \mathbf{v}), \quad \tau_{n-1} \neq 0, \quad n \geq 2,$$

donde T_μ es el operador Dunkl en una variable. Este par de funcionales lineales se dice par T_μ-coherente simétrico de segundo tipo. En este trabajo probamos las condiciones necesarias y suficientes que tiene que cumplir un par de funcionales simétricos $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ para que sea T_μ-coherente de segundo tipo. Además, damos una descripción completa de estos funcionales y mostramos como ejemplos aquellos en los que uno de los funcionales es T_μ-clásico (medida generalizada de Gegenbauer o medida generalizada de Hermite).

Agradecimientos. La investigación de Francisco Marcellán ha sido financiada por el proyecto de investigación PID2021- 122154NB-I00 *Ortogonalidad y Aproximación con Aplicaciones en Machine Learning y Teoría de la Probabilidad* del MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por "ERDF A Way of making Europe". La investigación de Judit Mínguez Ceniceros ha sido financiada por el proyecto de investigación PID2021-124332NB-C22 *Funciones especiales, aproximación y aplicaciones* del MICIU/AEI.

Zeros of linear combinations of orthogonal polynomials

Antonio J. Durán

Departamento de Análisis Matemático e IMUS, Universidad de Sevilla

duran@us.es

Resumen. Given a sequence of orthogonal polynomials $(p_n)_n$ with respect to a positive measure in the real line, we study the real zeros of finite combinations of $K+1$ consecutive orthogonal polynomials of the form

$$q_n(x) = \sum_{j=0}^{K} \gamma_j p_{n-j}(x), \quad n \geq K,$$

where γ_j, $j = 0, \cdots, K$, are real numbers with $\gamma_0 = 1$, $\gamma_K \neq 0$ (which do not depend on n). We prove that for every positive measure μ there always exists a sequence of orthogonal polynomials with respect to μ such that all the zeros of the polynomial q_n above are real and simple for $n \geq n_0$, where n_0 is a positive integer depending on K and the γ_j's.
Applications to the classical families of orthogonal polynomials will be considered.