

## Red Española de Topología

### Equipo organizador

- Ramón Jesús Flores Díaz (Universidad de Sevilla)
- Aniceto Murillo Mas (Universidad de Málaga)

### Descripción

La Red Española de Topología (RET) reúne a una comunidad de especialistas cuyas investigaciones se articulan en torno a ideas topológicas, ya sea desde una perspectiva teórica o aplicada. Como en ocasiones anteriores, la sesión que se plantea busca mostrar una selección de trabajos recientes que ilustran la variedad y riqueza de enfoques presentes en la RET. Se incluirán contribuciones que exploran aplicaciones novedosas de la topología junto a desarrollos más abstractos. También habrá espacio para investigaciones en líneas más consolidadas como la homotopía, las singularidades o la topología diferencial. Esta diversidad no solo refleja la amplitud del campo, sino también su capacidad para generar conexiones con otras áreas de las matemáticas y más allá. La sesión aspira a ser un punto de encuentro para compartir avances, ideas y perspectivas que alimentan el crecimiento continuo de la RET.

**Palabras clave:** Topología algebraica; Topología aplicada; Topología diferencial;

## Programa

JUEVES, 22 de enero

- |               |   |
|---------------|---|
| 11:00 – 11:30 | Antonio Viruel (Universidad de Málaga)<br><i>Realizando conjuntos de enteros como grados entre variedades</i>   |
| 11:30 – 12:00 | María Pe Pereira (Universidad Complutense)<br><i>Una teoría para estudiar degeneraciones métricas: Topología Algebraica Moderadamente Discontinua</i> |
| 12:00 – 12:30 | José Manuel García Calcines (Universidad de La Laguna)<br><i>Nuevas perspectivas sobre la categoría seccional relativa</i>                            |
| 12:30 – 13:00 | Daniel Hernández Serrano (Universidad de Salamanca)<br><i>Complejos simpliciales y aplicaciones: resiliencia topológica en redes</i>                  |
| 16:00 – 16:30 | David Mosquera (Universidad de Vigo)<br><i>Integración con respecto al número de Lefschetz</i>  |
| 16:30 – 17:00 | Alejandra Garrido (Universidad Complutense de Madrid)<br><i>Grupos simples localmente compactos totalmente desconexos</i>                             |
| 17:00 – 17:30 | Raúl Oset Sinha (Universidad de Valencia)<br><i>Avances recientes sobre la conjetura de Mond</i>  |
| 18:00 – 18:30 | Nuria Corral (Universidad de Cantabria)<br><i>Invariantes analíticos de cúspides y transversalidad polar</i>  |
| 18:30 – 19:00 | O'Bryan Cárdenas-Andaur (Universidad de Sevilla)<br><i>Algunos resultados sobre polinomios corchete</i>   |

## Realizando conjuntos de enteros como grados entre variedades

ANTONIO VIRUEL

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga

viruel@uma.es

### *Resumen.*

En esta charla consideraremos el problema de realizabilidad de conjuntos de enteros como conjuntos de grados entre variedades diferenciales. Esto es, dado un conjunto  $A$  de enteros, nos preguntamos si existen variedades diferenciales  $N$  y  $M$  de la misma dimensión tales que  $\deg(N, M) = A$ , en cuyo caso diremos que  $A$  es realizable. Obviamente, para que  $A$  sea realizable es necesario que  $A$  contenga el 0, pero observaremos que no todo conjunto de enteros que contiene el 0 es realizable. Mostraremos que todo conjuntos finito de enteros conteniendo 0 es realizable. En lo que se refiere a conjuntos infinitos, veremos que toda secuencia aritmética generalizada (unión de sucesiones aritméticas estándar) es realizable si sus términos poseen todos el mismo signo.

**Agradecimientos.** Trabajo en colaboración con Cristina Costoya y Vicente Muñoz

# Una teoría para estudiar degeneraciones métricas: Topología Algebraica Moderadamente Discontinua

MARÍA PE PEREIRA

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad Complutense

maria.pe@mat.ucm.es

## **Resumen.**

Así como la topología algebraica proporciona un lenguaje para hablar sobre las propiedades de los espacios topológicos salvo homeomorfismo (más precisamente, salvo homotopía), nosotros presentamos una teoría para hablar sobre degeneraciones métricas, que codifica en particular información métrica y dinámica.

En los trabajos [1] y [2] desarrollamos una teoría que se aplica a gérmenes analíticos/algebraicos y que proporciona invariantes analíticos. Los primeros ejemplos incluyen el cálculo para singularidades de curvas planas, en las que el invariante da los exponentes de Puiseux, o para singularidades normales de superficies, a partir de las cuales se puede obtener información sobre una resolución concreta de singularidades que codifica la métrica interna salvo homeomorfismo bilipschitz.

En el marco de [1] y [2] imponemos una hipótesis subanalítica (que, dicho de forma general, equivale a pedir que los espacios y aplicaciones sean PL). En un trabajo en curso estamos ampliando el marco de la teoría a familias continuas de espacios métricos. En esta charla hablaré sobre esta nueva versión. En particular, esto permite que la teoría exprese propiedades de degeneraciones muy generales de espacios métricos, tales como degeneraciones de métricas riemannianas.

## **Referencias**

- [1] J. Fernández de Bobadilla, S. Heinze, M. Pe Pereira, E. Sampaio (2022). Moderately Discontinuous Homology. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 75, 2123–2200. También disponible en arXiv:1910.12552v3
- [2] J. Fernández de Bobadilla, S. Heinze, M. Pe Pereira (2022), Moderately Discontinuous Homotopy. *International Mathematics Research Notices*, 23, 18346–18400. También disponible en ArXiv:2007.01538.

## Nuevas perspectivas sobre la categoría seccional relativa

JOSÉ MANUEL GARCÍA CALCINES

Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa, Universidad de La Laguna

jmgarc@ull.edu.es

### ***Resumen.***

El concepto de categoría seccional relativa amplía la teoría clásica de la categoría seccional incorporando el pullback de una fibración a lo largo de una aplicación continua. Nuestro trabajo no solo pretende explorar esta extensión, sino también investigar en profundidad sus propiedades. Buscamos descubrir cómo la categoría seccional relativa unifica diversos invariantes numéricos homotópicos aparecidos recientemente en la literatura. Entre ellos se incluyen la complejidad topológica de aplicaciones según Murillo–Wu o Scott, la complejidad topológica relativa definida por Farber, y la distancia homotópica para aplicaciones continuas en el sentido de Macías-Virgós y Mosquera-Lois, entre otros.

## Complejos simpliciales y aplicaciones: resiliencia topológica en redes

DANIEL HERNÁNDEZ SERRANO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Salamanca

dani@usal.es

### ***Resumen.***

Los complejos simpliciales son objetos que permiten modelar interacciones de orden superior en redes, permitiendo capturar relaciones entre grupos de más de dos agentes. En esta charla hablaremos de estos objetos combinatorios, su papel en el análisis topológico de datos (TDA) mediante homología persistente, y una reciente extensión que introduce nuevos números de Betti capaces de cuantificar la resiliencia estructural de agujeros topológicos frente a perturbaciones o ataques. Esta perspectiva potencia el alcance de la topología algebraica computacional, con aplicaciones emergentes en áreas como la oncología y la neurociencia.

## Integración con respecto al número de Lefschetz

DAVID MOSQUERA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Vigo

david.mosquera.lois@uvigo.gal

### *Resumen.*

En esta charla abordamos la integración con respecto a "medidas topológicas" algunas de sus aplicaciones. Comenzamos analizando la integración respecto a la característica de Euler-Poincaré y sus implicaciones en problemas de conteo. Sobre esta base, introducimos la integración con respecto a otras "medidas topológicas", como el número de Lefschetz, explorando las consecuencias de esta teoría en diversos contextos matemáticos y aplicados.

## Grupos simples localmente compactos totalmente desconexos

ALEJANDRA GARRIDO

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad Complutense de Madrid

agarri17@ucm.es

### *Resumen.*

Desde comienzos de este siglo, ha habido un interés creciente en los grupos localmente compactos totalmente desconexos (tdlc), y está empezando a emerger una teoría estructural al respecto. Un papel especial lo desempeña la clase  $S$  de grupos tdlc que son compactamente generados, topológicamente simples y no discretos. Si se pretende algún tipo de clasificación de estos grupos, hay que entender primero más ejemplos concretos.

Los grupos completos de homeomorfismos del espacio de Cantor son una fuente rica de grupos simples. En un trabajo conjunto con Colin Reid, se muestra que, dadas las condiciones adecuadas sobre el grupo "semilla", el grupo completo puede dotarse de una topología localmente compacta y totalmente desconexa, y contiene un subgrupo grande simple y compactamente generado. Un ejemplo de esto es el grupo de Neretin de cuasi-automorfismos de un árbol. En la charla se presentarán más ejemplos.

También se muestra que esta construcción da cuenta de todos los grupos de uno de los cinco tipos de grupos en la clase  $S$ , salvo isomorfismo local (el análogo totalmente desconexo de tener el mismo álgebra de Lie en el caso conexo).

No se asumirá conocimiento previo sobre grupos topológicos para esta charla.

## Avances recientes sobre la conjetura de Mond

RAÚL OSET SINHA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Valencia

raul.oset@uv.es

### ***Resumen.***

La conjetura de Mond es una conjetura tipo número de Milnor ( $\mu$ ) vs número de Tjurina ( $\tau$ ) pero para aplicaciones holomorfas  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  en lugar de funciones. Establece que la codimensión del germen es menor o igual que el número de Milnor de la imagen, con igualdad en el caso cuasi-homogéneo. Esto es una relación entre un invariante algebraico y un invariante topológico. Explicaremos los elementos necesarios para poder enunciar la conjetura y hablaremos de las recientes resoluciones para el caso de aumentaciones de singularidades (trabajo conjunto con I. Brevi Ribes) y el caso de frentes de ondas (trabajo conjunto con C. Muñoz-Cabello y J. J. Nuño-Ballesteros).

## Invariantes analíticos de cúspides y transversalidad polar

NURIA CORRAL

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria

nuria.corral@unican.es

### *Resumen.*

El semimódulo de valores diferenciales de una curva  $C$  es un invariante analítico clave en la clasificación analítica de curvas planas. Dicho semimodulo se obtiene a partir de los valores diferenciales de 1-formas. Una base estándar de la curva  $C$  está formada por 1-formas que determinan un sistema minimal de generadores del semimodulo. En el caso de cúspides, las 1-formas de la base estándar definen foliaciones dicríticas en el divisor cuspidal determinado por la curva  $C$ . Estas foliaciones dicríticas nos permiten definir las semirraíces analíticas de la curva cuyos semimodulos de valores diferenciales aproximan el de la curva de partida, en el sentido que se obtienen como una truncación del semimódulo inicial.

En este trabajo estudiamos bajo qué condiciones es posible determinar el semimódulo de valores diferenciales de las curvas invariantes de una foliación dicrítica en el divisor cuspidal. Estas condiciones están determinadas por la curva jacobiana de la foliación y las foliaciones definidas por las 1-formas de la base estándar.

## Algunos resultados sobre polinomios corchete

O'BRYAN CÁRDENAS-ANDAUR

Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla

autor@correo.es

### **Resumen.**

En el año 2000, Mikhail Khovanov introdujo el primer invariante homológico para nudos y enlaces, hoy conocido como *homología de Khovanov*. Dicho invariante constituye una categorificación del polinomio de Jones y es más fino que este, pues aporta abundante información acerca de las propiedades geométricas y topológicas del enlace. En particular, proporciona una cota para el género *slice* de un nudo y permitió dar una prueba combinatoria de la conjetura de Milnor (anteriormente demostrada mediante teoría de gauge). Más recientemente se ha demostrado que la homología de Khovanov detecta el nudo trivial, problema que sigue abierto para el polinomio de Jones.

Por otro lado, Aicardi y Juyumaya presentaron en 2016 los *enlaces ligados* (*tied links*), los cuales constituyen una generalización no trivial de los enlaces clásicos. Asimismo, definieron invariantes polinomiales para estos nuevos objetos; en particular, en 2018 introdujeron el invariante  $\langle\langle\cdot\rangle\rangle$ , que se especializa en el corchete de Kauffman y permite construir, mediante el método de Kauffman, una extensión del polinomio de Jones para enlaces ligados.

Esta charla se presentarán (i) resultados obtenidos en vía de definir una *versión “ligada” de la homología de Khovanov* y las complejidades que esto conlleva, y (ii) resultados y conjeturas sobre la búsqueda de invariantes para enlaces ligados anulares. Los primeros resultados fueron obtenidos en colaboración con J. González-Meneses y M. Silvero; los segundos, son parte de un trabajo en curso con Á. del Valle Vilchez.

### **Referencias**

- [1] Francesca Aicardi and Jesús Juyumaya. *Tied Links*. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 25(09):1650061, 2016.
- [2] Francesca Aicardi and Jesús Juyumaya. *Kauffman type invariants for tied links*. *Mathematische Zeitschrift*, 289:567–591, 2018.
- [3] O'Bryan Cárdenas-Andaur. *On the Aicardi–Juyumaya bracket for tied links*. Preprint, arXiv:2411.06259, 2024.
- [4] Mikhail Khovanov. *A categorification of the Jones polynomial*. *Duke Mathematical Journal*, 101(3):359–426, 2000.
- [5] Peter B. Kronheimer and Tomasz S. Mrowka. *Khovanov homology is an unknot detector*. *Publications mathématiques de l’IHÉS*, 113:97–208, 2011.