

Resolución numérica de problemas de propagación de ondas

Equipo organizador

- Manuel Pena (Universidad de Vigo)
- Virginia Selgas Buznego (Universidad de Oviedo)

Descripción La propagación de ondas tiene un papel clave en multitud de fenómenos físicos: desde la escala micro o subatómica a la macro de todo el universo observable, pasando por la escala humana (sonidos, vibraciones, olas, óptica...). En la actualidad presentan aplicaciones en una gran variedad de campos de ciencia e ingeniería, tales como telecomunicaciones, técnicas de imagen y diversos procesos industriales. El objetivo de esta sesión especial es la discusión de avances recientes en la simulación de problemas directos e inversos relativos a la propagación de ondas, de manera que se establezcan y fortalezcan lazos de colaboración entre distintos grupos de investigación españoles. La sesión tratará de abordar diversas cuestiones sobre el desarrollo de estudios teóricos y numéricos relacionados con la propagación de ondas de tipo mecánico (en particular, elásticas y acústicas) o electromagnético. Los temas de interés abordados en esta sesión incluyen los relativos a técnicas de modelización, análisis y simulación numérica así como aplicaciones industriales, entre otros.

Palabras clave: simulación numérica; propagación de ondas; análisis numérico.

Programa

JUEVES, 22 de enero

11:00 – 11:30	—
11:30 – 12:00	—
12:00 – 12:30	Jerónimo Rodríguez (Universidad de Santiago de Compostela) <i>Estabilidad de integradores temporales para sistemas lineales de Friedrichs</i>
12:30 – 13:00	Víctor Domínguez (Universidad Pública de Navarra) <i>Nyström Discretizations of Helmholtz Decomposition BIEs for 2D Elastic Wave Scattering</i>
15:30 – 16:00	Virginia Selgas (Universidad de Oviedo) <i>Análisis de un método de Trefftz para la simulación de la propagación de ondas en el espacio libre</i>
16:00 – 16:30	Manuel Pena (Universidad de Vigo) <i>Implementación de un método de Trefftz para la resolución de la ecuación de Helmholtz en una guía de ondas</i>
16:30 – 17:00	Pilar Salgado (Universidad de Santiago de Compostela) <i>Análisis matemático y numérico de un problema termo-electromagnético axisimétrico</i>
17:00 – 17:30	—
18:00 – 18:30	—
18:30 – 19:00	—

VIERNES, 23 de enero

11:00 – 11:30	María-Luisa Rapún (Universidad Politécnica de Madrid) <i>Processing poor experimental databases for object detection by topological derivative based methods</i>
11:30 – 12:00	Claudiu Placinta (Universidad Politécnica de Madrid) <i>Topological derivative methods for identifying elastic scatterers in industrial problems</i>
12:00 – 12:30	Ana Carpio (Universidad Complutense de Madrid) <i>Problemas inversos Bayesianos en geofísica</i>

Estabilidad de integradores temporales para sistemas lineales de Friedrichs

JERÓNIMO RODRÍGUEZ, SÉBASTIEN IMPERIALE, PATRICK JOLY

Departamento de Matemática Aplicada y CITMaga, Universidade de Santiago de Compostela

jeronimo.rodriguez@usc.es

Resumen. En el presente trabajo discutimos varios resultados teóricos de estabilidad fuerte de integradores Runge-Kutta de s etapas y orden s aplicados a discretizaciones de tipo Galerkin-discontinuo de sistemas lineales hiperbólicos simétricos en el sentido de Friedrichs. Restringimos el estudio al caso de sistemas conservativos y para problemas de Cauchy. Los resultados se compararán con aquellos en las referencias [1, 2, 3, 4].

Referencias

- [1] D. Levy, E. Tadmor. (1998). From semidiscrete to fully discrete: Stability of Runge–Kutta schemes by the energy method. *SIAM Review*.
- [2] Z. Sun, C.-W. Shu. (2017) Stability of the fourth order Runge–Kutta method for time-dependent partial differential equations. *Annals of Mathematical Sciences and Applications*.
- [3] Z. Sun, C.-W. Shu. (2019). Strong stability of explicit Runge–Kutta time discretizations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*.
- [4] E. Tadmor. (2002). From semidiscrete to fully discrete: Stability of Runge–Kutta schemes by the energy method. ii. *Proceedings in Applied Mathematics, SIAM*.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por la Xunta de Galicia a través del proyecto 2021GRCGI – 1563ED431C2021/15 y por el Ministerio de Ciencia Innovación y Universidades (MCIN/AEI/10,13039/501100011033/FEDER) por el proyecto PID2021 – 122625OB – I00.

Nyström Discretizations of Helmholtz Decomposition BIEs for 2D Elastic Wave Scattering

VÍCTOR DOMÍNGUEZ, CATALIN TURC

Dep. Estadística, Matemática e Informática, Universidad Pública de Navarra

victor.dominguez@unavarra.es

Resumen. Boundary Integral Equations (BIEs) are powerful tools for solving scattering problems in unbounded domains, in both two and three dimensions. In this work, we focus on two-dimensional elastic wave scattering governed by the Navier equations, and approach its solution through BIE formulations. Rather than relying on classical methods based on the fundamental solution of elastodynamics, we employ a Helmholtz decomposition of the displacement field. This representation expresses the solution as the sum of the gradient (compressional wave) and the rotational (shear wave) of scalar potentials satisfying Helmholtz equations, which are simpler to handle.

A key challenge is that a naïve application of this decomposition leads to ill-posed formulations: the resulting operator is not of Fredholm type, with both the kernel and the co-image of its principal part being infinite-dimensional.

To overcome this, we design a suitable preconditioner that restores well-posedness. The resulting formulation is then discretized using Nyström methods, yielding a numerical scheme with superalgebraic convergence. We provide a theoretical analysis that proves well-posedness of the continuous problem, as well as the stability and superalgebraic convergence of its discretization.

Referencias

- [1] V. Domínguez, C. Turc (2024). Robust boundary integral equations for the solution of elastic scattering problems via Helmholtz decompositions, *Comput. Math. Appl.*, vol. 175, 152–173. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2024.09.013>
- [2] V. Domínguez, C. Turc (2024). Nyström discretizations of boundary integral equations for the solution of 2D elastic scattering problems, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 440, Paper No. 115622, 28 pp. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115622>

Agradecimientos. The author acknowledges the support of the projects “Adquisición de conocimiento y minería de datos, funciones especiales y métodos numéricos avanzados” from Universidad Pública de Navarra, Spain, and “Técnicas innovadoras para la resolución de problemas evolutivos”, ref. PID2022-136441NB-I00, from the Ministerio de Ciencia e Innovación, Gobierno de España.

Análisis de un método de Trefftz para la simulación de la propagación de ondas en el espacio libre

VIRGINIA SELGAS, PETER MONK, MANUEL PENA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo

selgasvirginia@uniovi.es

Resumen. El objetivo de este trabajo es proponer y analizar un método de Trefftz, como caso particular de método de Galerkin discontinuo, para la simulación numérica de la propagación de ondas acústicas en el dominio de frecuencias. Suponemos que la dispersión acústica se debe a la presencia de un obstáculo acotado, penetrable y posiblemente absorbente. Así, el problema modelo es un problema de transmisión para la ecuación de Helmholtz, con un índice de refracción no constante y posiblemente complejo en el obstáculo.

Hacemos uso de un dominio computacional que contiene al objeto e incluimos la condición de radiación sobre la frontera artificial usando el operador Neumann a Dirichlet (N-a-D). Proponemos una formulación con elementos de Trefftz en el dominio computacional, y analizamos su convergencia. En particular demostramos que, cuando se discretiza localmente con ondas planas, el esquema numérico presenta convergencia cuasi óptima tanto al refinar la malla como al incrementar el número de ondas planas utilizadas en cada elemento. También estudiamos el efecto de la aproximación numérica del operador N-a-D.

Concluimos mostrando resultados numéricos que verifican nuestros resultados de convergencia teóricos y que ilustran el comportamiento del método.

Referencias

- [1] R. Hiptmair, A. Moiola, I. Perugia (2011), Plane wave discontinuous Galerkin methods for the 2D Helmholtz equation: analysis of the p -version. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(1), 264–284.
- [2] R. Hiptmair, A. Moiola, I. Perugia (2016). A Survey of Trefftz Methods for the Helmholtz Equation. In G.R. Barrenechea, A. Cangiani, E.H. Geogoulis, eds., *Building Bridges: Connections and Challenges in Modern Approaches to Numerical Partial Differential Equations*, Lect. Notes Comput. Sci. Eng., vol. 114, Springer, 237–278.
- [3] P. Monk, M. Pena, V. Selgas (2025). Trefftz Discontinuous Galerkin Approximation of an Acoustic Waveguide. *SIAM J. Numer. Anal.*, 63(4), 1561–1585.
- [4] P. Monk, D.Q. Wang (1999). A least-squares method for the Helmholtz equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 175, 121–136.

Agradecimientos. Trabajo parcialmente financiado por el proyecto MICINN PID2020-116287GB-I00.

Implementación de un método de Trefftz para la resolución de la ecuación de Helmholtz en una guía de ondas

MANUEL PENA, PETER MONK, VIRGINIA SELGAS

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidade de Vigo

manuel.pena@uvigo.gal

Resumen. Los métodos de Trefftz [1, 2] se pueden enmarcar dentro del conjunto de métodos tipo Galerkin discontinuo, en los que las funciones de base utilizadas pertenecen al núcleo del operador diferencial. De este modo, la ecuación diferencial se satisface localmente en el interior de cada elemento y el problema consiste en imponer adecuadamente condiciones de transmisión entre elementos. En [3] se resuelve la ecuación de Helmholtz en una guía de ondas utilizando como bases locales un conjunto de ondas planas que son soluciones de la ecuación de Helmholtz en el elemento. Esto tiene varias ventajas:

- Todas las integrales se plantean únicamente en las facetas de los elementos.
- Las integrales admiten fórmulas exactas.
- La información sobre el número de onda está incluida en la base de funciones, con lo cual para números de onda muy altos no es necesario refinar extremadamente la malla, o aumentar el número de funciones de base, lo cual, además, atenúa el efecto de polución del error.

Por otra parte, el condicionamiento de la matriz del sistema lineal asociado empeora rápidamente cuando se enriquecen las bases locales de ondas planas, por lo que este tipo de métodos suelen presentar problemas de estabilidad.

En esta charla se detallarán los resultados anteriormente mencionados, así como se mostrará la dependencia de la solución con respecto al número de modos utilizados para aproximar el operador Neumann-a-Dirichlet usado para acotar el dominio computacional.

Referencias

- [1] R. Hiptmair, A. Moiola, I. Perugia (2011), Plane wave discontinuous Galerkin methods for the 2D Helmholtz equation: analysis of the p -version. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(1), 264–284.
- [2] R. Hiptmair, A. Moiola, I. Perugia (2016). A Survey of Trefftz Methods for the Helmholtz Equation. In G.R. Barrenechea, A. Cangiani, E.H. Geogoulis, eds., *Building Bridges: Connections and Challenges in Modern Approaches to Numerical Partial Differential Equations*, Lect. Notes Comput. Sci. Eng., vol. 114, Springer, 237–278.
- [3] P. Monk, M. Pena, V. Selgas (2025). Trefftz Discontinuous Galerkin Approximation of an Acoustic Waveguide. *SIAM J. Numer. Anal.*, 63(4), 1561–1585.

Agradecimientos. Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio Español de Ciencia, Innovación y Universidades/Agencia Estatal de Investigación (MCIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER,UE) mediante el proyecto PID2023-147790OB-I00.

Análisis matemático y numérico de un problema termo-electromagnético axisimétrico

PILAR SALGADO, DOLORES GÓMEZ, BIBIANA LÓPEZ-RODRÍGUEZ, PABLO VENEGAS

Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela & CITMaga, Centro de
Investigación y Tecnología Matemática de Galicia

mpilar.salgado@usc.es

Resumen. El objetivo de este trabajo es analizar desde un punto de vista matemático y numérico un problema de corrientes inducidas axisimétrico acoplado con la ecuación del calor [2]. Se trata de un modelo ampliamente utilizado en la simulación de procesos de calentamiento por inducción con geometría cilíndrica y cuyas dificultades teóricas son similares a las que presenta el problema clásico del termistor [3]. El modelo electromagnético se formula en régimen armónico y en términos de la componente acimutal del vector potencial magnético, mientras que el modelo térmico se estudia en régimen estacionario. Para probar la existencia de solución del problema acoplado se utiliza un teorema de punto fijo siguiendo las ideas de [1] y [5]. Además, se prueba la unicidad de solución bajo hipótesis adicionales sobre los datos.

Se propone un algoritmo de punto fijo para resolver el problema acoplado y una discretización de las iteraciones de punto fijo basada en elementos finitos nodales. Inspirándose en las ideas de [4] se prueba la convergencia lineal de la iteración de punto fijo y se derivan órdenes de convergencia óptimos para su aproximación mediante elementos finitos. Finalmente se muestran resultados numéricos sobre un test académico para validar las estimaciones de error teóricas así como resultados sobre una aplicación física.

Referencias

- [1] A. Bermúdez, R. Muñoz-Sola (1999). Existence of solution of a coupled problem arising in the hermoelectrical simulation of electrodes. *Quart. Appl. Math.*, 57 (4), 621–636.
- [2] D. Gómez, B. López-Rodríguez, P. Salgado, P. Venegas. A coupled steady thermo-electromagnetic problem in axisymmetric geometries. *IMA J. Numer. Anal.*, drae056, <https://doi.org/10.1093/imanum/drae056>
- [3] S.D. Howison, J.F. Rodrigues, M. Shillor (1993). Stationary solutions to the thermistor problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 174(2), 573–588.
- [4] A. F. D. Loula, J. Zhu (2001). Finite element analysis of a coupled nonlinear system. *Comput. Appl. Math.*, 20(3), 321–339.
- [5] I. Yousept. Optimal control of a nonlinear coupled electromagnetic induction heating system with pointwise state constraints (2010). *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.*, 2(1), 45–77.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por FEDER, Ministerio de Economía, Industria y Competitividad-AEI research project PID2021-122625OB-I00.

Processing poor experimental databases for object detection by topological derivative based methods

MARÍA-LUISA RAPÚN, MANUEL PENA

Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Aeroespacial, Universidad Politécnica de Madrid

marialuisa.rapun@upm.es

Resumen. The main goal in inverse scattering problems is to reconstruct information about unknown objects or defects from measurements of scattered acoustic or electromagnetic waves. In many practical experimental setups, only limited aperture excitations and limited aperture receptor configurations are available.

In this talk we will study the performance of numerical methods based on the computation of topological derivatives and topological energies to process very reduced experimental measurements of the electromagnetic scattering produced by different objects extracted from the Fresnel database [1, 2].

Referencias

- [1] A. Carpio, M. Pena, M.-L. Rapún (2021). Processing the 2D and 3D Fresnel experimental databases via topological derivative method. *Inverse Problems*, 37, art. 105012.
- [2] M. Pena, S. Muñoz, M.-L. Rapún (2024). Exploring the performance of the topological energy method for object and damage detection from noisy and poor databases. *Phil. Trans. R. Soc. A.*, 382, art. 20230303.

Agradecimientos. This work has been funded by the Spanish Ministry of Science, Innovation and Universities/State Research Agency (MCIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER,UE) under grant PID2023-147790OB-I00.

Topological derivative methods for identifying elastic scatterers in industrial problems

CLAUDIU PLACINTA, SERGIO MUÑOZ, GUILLERMO AZUARA, EDUARDO BARRERA, MARÍA-LUISA RAPÚN

Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Aeroespacial, Universidad Politécnica de Madrid

claudiu.placinta@upm.es

Resumen. Defects like holes or cracks inside materials can be modeled as scatterers of elastic waves. This scattering phenomena is used to detect and identify the presence of defects in many industrial applications. The majority of industrial methods for defect detection are based on the elapsed time of the scattered wave. Contrary, in this work, we present a method that takes into account the physics of the wave propagation phenomena and exploits it for defect detection. This method is based on a mathematical tool called topological derivative, which measures the sensitivity of a functional to infinitesimal domain perturbations. In this work, we will show numerical examples of different industrial applications of the method, such as real-time inspection of metallic plates and detection of flaws in welding steel joints.

Agradecimientos. This work has been funded by the Spanish Ministry of Science, Innovation and Universities/State Research Agency (MCIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER,UE) under grant PID2023-147790OB-I00. The authors gratefully acknowledge the Universidad Politécnica de Madrid (www.upm.es) for providing computing resources on Magerit Supercomputer.

Problemas inversos Bayesianos en geofísica

ANA CARPIO, ELENA CEBRIÁN, GERARDO OLEAGA, CAROLINA ABUGATTAS

Departamento Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid

ana.carpio@mat.ucm.es

Resumen. La resolución de problemas de scattering inverso conduce a menudo a problemas de optimización y muestreo que requieren tratar cantidades moderadas/grandes de ecuaciones en derivadas parciales que actúan como restricciones. Nos centraremos en el problema de determinar inclusiones en un medio estratificado a partir de la medición de campos de ondas en la superficie, al tiempo que cuantificamos la incertidumbre en las predicciones y evaluamos el efecto de distintas discretizaciones de las ecuaciones de ondas. Caracterizamos las inclusiones mediante parámetros que describen las propiedades y formas de sus materiales. Diseñaremos algoritmos adaptativos para estimar las configuraciones más probables mediante optimización de funcionales de coste con regularizaciones Bayesianas y restricciones de tipo ecuación de ondas [1]. En pruebas sintéticas con una sola frecuencia, estos esquemas convergen en pocas iteraciones con niveles de ruido crecientes. Para obtener una visión global de otras posibles configuraciones de alta probabilidad y de efectos de asimetría, recurrimos a la resolución del problema Bayesiano inverso mediante métodos de cadenas de Markov Monte Carlo de invarianza afín. Su implementación requiere resolver millones de problemas de ondas y obliga a usar mallas fijas. Si bien las configuraciones óptimas siguen siendo similares, encontramos inclusiones adicionales de alta probabilidad que dependen de la información previa, el nivel de ruido y la estructura de las capas, efecto que puede reducirse considerando más frecuencias [1].

Referencias

- [1] C. Abugattas, A. Carpio, E. Cebrián, G. Oleaga (2025). Quantifying uncertainty in inverse scattering problems set in layered environments. *Applied Mathematics and Computation*, 500, 129453.

Agradecimientos. Proyecto parcialmente financiado por el proyecto MICINN - AEI PID2020-112796RB-C21.