

El teorema del collar para superficies completas

JOSÉ M. RODRÍGUEZ, PETER BUSER

Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid

jomaro@math.uc3m.es

Resumen. Sea S una superficie riemanniana orientable completa con curvatura $K \geq -k^2$, donde k es una constante positiva. Para cualquier geodésica simple cerrada γ en S y $d > 0$, denotamos por

$$C(d) = \{x \in S \mid \text{dist}(x, \gamma) < d\}$$

el entorno tubular de radio d de γ . Si $d > 0$ es suficientemente pequeño, entonces $C(d)$ es doblemente conexo, es decir, topológicamente equivalente a $\mathbb{S}^1 \times (-1, 1)$. Si S tiene curvatura no positiva y $C(d)$ es doblemente conexo, entonces lo mismo se cumple para todos los $C(d')$ con $0 < d' < d$. En el caso general, esto no siempre es así. Para γ una geodésica cerrada simple de longitud $L(\gamma)$ en S , definimos d_γ como el supremo de todos los $d > 0$ para los que $C(d)$ y también todos los $C(d')$ con $0 < d' < d$ son topológicamente equivalentes a $\mathbb{S}^1 \times (-1, 1)$. El cilindro $C(d_\gamma)$ de anchura d_γ se denomina *collar alrededor de γ* .

Si S es compacta con curvatura constante $K = -k^2$, Randol demostró en [3] que

$$d_\gamma > \frac{1}{k} \operatorname{arccosh} \coth\left(\frac{k}{2} L(\gamma)\right) = \frac{1}{k} \operatorname{arcsinh} \operatorname{cosech}\left(\frac{k}{2} L(\gamma)\right). \quad (1)$$

Chavel y Feldman demostraron en [2] que (1) también se cumple si S es compacta y su curvatura satisface $-k^2 \leq K \leq -c^2$, con $c > 0$.

Después de eso, un enfoque alternativo en [1] permitió al segundo autor demostrar que (1) se cumple si S es compacta con $K \geq -k^2$.

Mientras que los argumentos anteriores de Randol, y Chavel y Feldman, funcionan para superficies completas, el argumento en [1] utiliza fuertemente la compacidad.

Nuestro objetivo en este trabajo es generalizar el resultado de [1] para superficies completas:

Teorema. Sea S una superficie riemanniana orientable completa diferente de un toro con curvatura $K \geq -k^2$. Si γ es una geodésica simple cerrada homotópicamente no trivial en S , entonces se cumple (1).

Palabras clave: Teorema del collar; comparación de Toponogov; conjuntos de nivel de funciones distancia.

Referencias

- [1] P. Buser (1978). The collar theorem and examples. *Manuscripta Math.*, 25, 349–357.
- [2] I. Chavel, E. A. Feldman (1978). Cylinders on surfaces. *Comment. Math. Helv.*, 53, 439–447.
- [3] B. Randol (1979). Cylinders in Riemann surfaces. *Comment. Math. Helv.*, 54, 1–5.

Indicar la preferencia (subrayar la opción elegida): póster o charla.

Indicar la preferencia (subrayar la opción elegida): Lunes/Martes o Jueves/Viernes (no tengo preferencia).